

Die Stabilität von Einspurfahrzeugen

Von Dr.-Ing. E. Döhring, Institut für Fahrzeugtechnik, Braunschweig

Die Bewegungsstabilität eines Einspurfahrzeuges wird in der Entwicklungspraxis durch das Einhalten von Erfahrungswerten und durch den Fahrversuch hergestellt. Die für ein bestimmtes Modell günstigsten Stabilitätsverhältnisse lassen sich unter geringem Aufwand mit Hilfe des Versuchs finden, weil man dabei nur zwei Veränderliche, den Steuerwinkel σ und den Nachlauf c_1 (Bild 1 und 2) zu variieren und die Bestwerte zu ermitteln braucht. Untersuchungen über den Einfluß von Massenverteilung, Schwerpunktlage, Kreiselkräften und anderen Einflußgrößen, über das Zusammenwirken der einzelnen Kräfte und schließlich die Aufstellung von allgemein gültigen Konstruktionsgrundlagen sind jedoch durch das Experiment nur unvollkommen und unter sehr großem Aufwand möglich. Dagegen kann man rechnerisch die einzelnen Baugrößen beliebig variieren und die Auswirkungen auf den Bewegungsablauf studieren. Es ist deshalb von praktischer Bedeutung, theoretische Untersuchungen über die Stabilität des Einspurfahrzeuges anzustellen.

Die theoretische Behandlung des Bewegungsablaufes

Grundlage für jede derartige Untersuchung ist die Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Systems. Hierbei müssen freilich bei einem so komplizierten mechanischen Gebilde Vernachlässigungen und Vereinfachungen getroffen werden. So wird zunächst die Rechnung auf kleine Winkel in der Nähe der aufrechten Mittellage und die Betrachtung der gradlinigen Fahrt beschränkt. Diese Vereinfachung ist voll gerechtfertigt, da die Abweichungen von der Mittellage bei der Geradeausfahrt nur wenige Grade betragen. Bei der Kurvenfahrt führt das System ebenfalls nur kleine Schwingungen um eine Mittellage aus, die durch die Ebene bestimmt ist, in der die Resultierende aus Schwerkraft und Zentrifugalkraft und die beiden Aufstandspunkte liegen. Die Vergrößerung der Aufstandskräfte und die Verschiebung ihres Angriffspunktes im Latsch können durch Ansatz der Bewegungsgleichungen für die Kurvenfahrt auf gleiche Weise wie für die Geradeausfahrt berücksichtigt werden.

Die vorliegende Betrachtung beschränkt sich jedoch zunächst auf die Geradeausfahrt und große Kurvenhalbmesser, die mit einer Schräglage bis zu etwa 10° durchfahren werden.

Weiterhin müssen die Bewegungsgleichungen des Systems linearisiert werden, weil sie sonst nicht exakt integriert werden können. Eine näherungsweise Integration der genauen Differentialgleichungen würde wegen des gewaltigen Rechenaufwandes keine praktische Bedeutung haben. Ferner werden die gefederte Aufhängung der Räder und die Federung der Luftbereifung sowie die endliche Ausdehnung des Latsches außer Betracht gelassen. Schließlich wird der Fahrer als starr mit dem Rahmen verbunden angesehen. Diese notwendige Annahme bringt zweifellos einen Fehler in die Berechnung, der nicht immer als klein angesehen werden kann. Besonders bei leichten Maschinen und vor allem bei Rollern, auf welchen der Knieschluß fehlt, nimmt der Fahrer nicht voll an allen Bewegungen des Rahmens teil.

Es ist deshalb nötig, den Einfluß dieser Vernachlässigungen auf das Ergebnis durch Messungen im Fahrversuch zu prüfen und damit die Berechnungen auf ihre Brauchbarkeit hin zu untersuchen.

Berechnungen über den Bewegungsablauf von Einspurfahrzeugen haben bereits gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Väter der Mechanik vorgenommen. Klein und Sommerfeld (1890) stellten die Bewegungsgleichungen für das Fahrrad auf und zeigten den Weg zu deren Integration¹⁾. Bis auf einige zusätzlich bzw. genauer zu berücksichtigende Größen gelten diese Gleichungen auch für Kraffräder. Über die Ableitung soll hier nur ein Überblick gegeben werden.

Wenn man die Fortbewegungsgeschwindigkeit als konstant ansetzt, so behält das Kraffrad noch zwei Freiheitsgrade; Es kann seitlich kippen und die Steuerung kann gedreht werden.

¹⁾ Klein-Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Bd. 4 (Anwendungen), Berlin und Leipzig 1910; vgl. auch R. Grammel: Der Kreisel, 2. Aufl. Bd 2 (Die Anwendungen des Kreisels). Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Entsprechend ergeben sich zwei Bewegungsgleichungen für das System. Diese beiden homogenen Differentialgleichungen sind mit Hilfe des Ansatzes $k_1 \cdot e^{i\lambda t}$ zu integrieren. Nach den Regeln zur Lösung derartiger Gleichungssysteme ist die Determinante der Koeffizienten der Konstanten k_1 gleich Null zu setzen. Diese Koeffizienten-Determinante stellt den Schlüssel zur Berechnung des Bewegungsablaufes und zur Betrachtung der Stabilität des Einspurfahrzeuges dar. Die Koeffizienten-Determinante lautet (siehe Seite 69 unten).

Die Determinante ist dreispaltig, weil man zu den beiden Bewegungsgleichungen noch eine geometrische Bedingungsgleichung hinzufügt, welche die Abhängigkeit der Schräglage des Vorderradsystems von der Schräglage des Rahmens und dem Lenkeinschlag angibt.

In der Determinante bedeuten:

Massenverhältnisse:

$$M = \frac{m_1}{m_2}; M_{K1} = \frac{m_{R1}}{m_2}; M_{K2} = \frac{m_{R2}}{m_2}$$

Trägheitsverhältnisse:

$$K_{1vh} = \frac{k_{1vh}}{I}; K_{2vh} = \frac{k_{2vh}}{I}; K_R = \frac{k_R}{\sqrt{I \cdot R_{dyn}}}; K_{1h} = \frac{k_{1h}}{I};$$

$$K_{1v} = \frac{k_{1v}}{I}; K_{2h} = \frac{k_{2h}}{I}; K_{2v} = \frac{k_{2v}}{I}$$

Längenverhältnisse:

$$H_1 = \frac{h_1}{l}; H_2 = \frac{h_2}{l}; C_1 = \frac{c_1}{l}; C_2 = \frac{c_2}{l}; R_1 = \frac{r_1}{l};$$

$$R_2 = \frac{r_2}{l}; R = \frac{r}{l}$$

reduzierte Frequenz: $\Omega = \lambda \cdot l/v$

Quadrat des Kehrwerts der Froudeschen Zahl: $f = g \cdot l/v^2$

Die Abmessungen bezeichnen (Bild 1 und 2):

h_1	[cm]	Schwerpunkthöhe des Vorderradsystems,
h_2	"	Schwerpunkthöhe des Hinterradsystems,
c_1	"	Nachlauf,
c_2	"	Abstand des Durchstichpunktes D vom Aufstandspunkt des Hinterrades P_2 ,
k_h	"	Trägheitsarm auf der horizontalen Achse,
k_v	"	Trägheitsarm auf der vertikalen Achse,
k_{vh}	"	Trägheitsarm für das Deviationsmoment,
k_R	"	Trägheitsradius des Rades,
l	"	Radstand ($c_1 - c_2 = l$),
m_1	[kg sec ² /cm]	Masse des Vorderradsystems,
m_2	"	Masse des Hinterradsystems,
m_{R1}	"	auf den Trägheitsradius reduzierte Maße des Vorderrades,
m_{R2}	"	auf denselben Trägheitsradius reduzierte Maße des Hinterrades und des Motors (unter Berücksichtigung der Übersetzung),
r	[cm]	Abstand des Angriffspunktes der vertikalen Reaktionskraft vom Aufstandspunkt P_1 ,
r_1	"	vertikaler Abstand Schwerpunkt -- Aufstandspunkt am Vorderradsystem,
r_2	"	desgl. am Hinterradsystem,

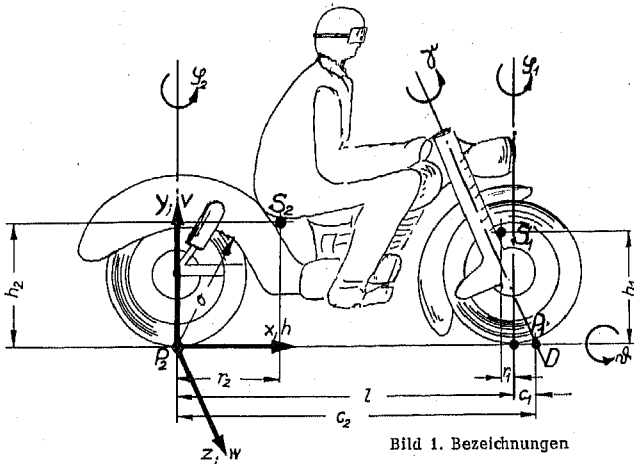


Bild 1. Bezeichnungen

- R_{dyn} [cm] Arbeitshalbmesser des Rades
- s_1 " Abstand des Schwerpunktes des Vorderradsystems von der Drehachse,
- s_2 " desgl. des Hinterradsystems,
- v [cm/sec] Geschwindigkeit,
- g [cm/sec²] Erdbeschleunigung,
- λ [1/sec] Frequenz.

Alle Werte der Determinante sind durch die Einführung der Verhältnissgrößen dimensionslos geworden. Dadurch wird die Rechnung übersichtlich und erfaßt nicht nur eine Maschine, sondern alle Maschinen mit den gleichen Verhältnisswerten. An Stelle der Frequenz λ (aus dem Ansatz $k_1 e^{i\lambda t}$) wurde die reduzierte dimensionslose Frequenz $\Omega = \lambda \cdot l/v$ und als dimensionslose Zeit $\tau = t \cdot v/l$ eingeführt. Da das System Bewegungen unter dem Einfluß der Schwerkraft ausführt, tritt bei Einführung der dimensionslosen Werte die Froudesche Zahl $Fr = v/\sqrt{g \cdot l}$ auf, und zwar erscheint in den Gliedern, die den Erdbeschleunigungsfaktor enthalten, das Quadrat der reziproken Froudeschen Zahl, das mit $f = g \cdot l/v^2$ bezeichnet wurde. Die Froudesche Zahl gibt das Modellgesetz an, nach welchem bei geometrisch ähnlicher Verkleinerung des Systems (und ähnlicher Verkleinerung seiner Massen- und Trägheitsverhältnisse) die Geschwindigkeit herabgesetzt werden muß, damit ähnliche dynamische Verhältnisse entstehen.

Setzt man in die Koeffizienten-Determinante die Baugrößen des untersuchten Kraftrades ein, so ergibt sich z. B. für eine Dürkopp MD 150:

$2,83 \cdot 10^{-2} \Omega^2 - f \cdot 5,84 \cdot 10^{-2}$	$3,48 \cdot 10^{-1} \Omega^2 - 5,44 \cdot 10^{-1} f$	$5,4 \cdot 10^{-3} \Omega^2 - 2,74 \cdot 10^{-1} \Omega + f \cdot 1,36 \cdot 10^2 - 6,22 \cdot 10^{-1}$
$-6,96 \cdot 10^{-3} \Omega^2 + 7,72 \cdot 10^{-3} \Omega^2$	$-2,52 \cdot 10^{-2} \Omega^2 + 7,67 \cdot 10^{-4} \Omega$	$2,3 \cdot 10^{-3} \Omega^2 + 4,34 \cdot 10^{-2} \Omega + 6,65 \cdot 10^{-2}$
$+ 1,62 \cdot 10^{-2} f$	$+ 4,48 \cdot 10^{-2} f$	$-1,432 \cdot 10^{-2} f$
1	-1	0,5206

Die Ausrechnung der Determinante führt zu einer algebraischen Gleichung 4. Grades für Ω . Sie lautet für die gleiche Maschine:

$$\Omega^4 + 3,9 \Omega^3 + (4,65 - 6,75 f) \Omega^2 + (3,34 - 4,74 f) \Omega + (6,34 f - 1,32) f = 0.$$

Durch Iteration (oder auch durch einfaches Probieren) lassen sich die vier Wurzeln von Ω finden. Dabei ergeben sich in jedem Fall zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln. Die beiden komplexen Wurzeln $\Omega_{1,2} = a \pm i\beta$ stellen als Exponenten von e eine gedämpfte Schwingung dar:

$$e^{\Omega_{1,2} \tau} = e^{-(a \pm i\beta) \tau}.$$

Darin sind a der Dämpfungsfaktor und β die Frequenz. Man erhält z. B. für die Dürkopp MD 150 bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h entsprechend einer Froudeschen Zahl $Fr = 7,03$ die komplexen Wurzeln $\Omega_{1,2} = -0,58 \pm 0,913 i$. Zum Vergleich mit dem Fahrversuch kann die reduzierte Frequenz Ω umgerechnet werden in die dimensionsbehaftete Frequenz

$$\lambda_{1,2} = \Omega_{1,2} \cdot v/l.$$

$$\text{Man erhält: } \lambda_{1,2} = -11,6 \pm 17,7 i.$$

Die Schwingungszeit des Systems ist also

$$T = 2 \pi / \gamma = 2 \pi / 17,7 = 0,35 \text{ sek.}$$

Koeffizienten-Determinante:

$MK_{1h}^2 \Omega^2 - fMH_1$	$K_{2h}^2 \Omega^2 - fH_2$	$-MK_{1vh}^2 (C_2 \Omega^2 + \Omega) - K_{2vh}^2 (C_1 \Omega^2 + \Omega) -$ $-\Omega K_{2R}^2 (MK_{1C_2} + MK_{2C_1}) - K_{2R}^2 (MK_{1C_1} + MK_{2C_2})$ $-\Omega (MH_1 C_2 + H_2 C_1) - (MH_1 + H_2)$ $+ f(R_2 + MR_1)(C_1 - R)$
$-\Omega^2 C_2 (MK_{1h}^2 \sin \sigma +$ $+ MK_{1vh}^2 \cos \sigma) +$ $+ \Omega MR_1 K_{2R}^2 C_2 \cos \sigma +$ $+ fMC_2 S_1$	$-\Omega^2 C_1 (K_{2h}^2 \sin \sigma +$ $+ K_{2vh}^2 \cos \sigma) +$ $+ \Omega MR_2 K_{2R}^2 C_1 \cos \sigma +$ $+ fC_1 S_2$	$(\Omega^2 C_2^2 + \Omega C_2) (MK_{1v}^2 \cos \sigma + MK_{1vh}^2 \sin \sigma) +$ $+ (\Omega^2 C_1^2 + \Omega C_1) \cdot (K_{2v}^2 \cos \sigma + K_{2vh}^2 \sin \sigma) +$ $+ \Omega \sin \sigma K_{2R}^2 (C_1^2 MR_2 + C_2^2 MR_1) +$ $+ \sin \sigma K_{2R}^2 (C_2 MR_1 + C_1 MR_2) +$ $+ \Omega (C_2^2 MS_1 + C_1^2 S_2) + (MS_1 C_2 + S_2 C_1) -$ $- fC_1 C_2 \sin \sigma (R_2 + MR_1)$
1	-1	$\lg \sigma$

= 0

Die Schwingung ist aperiodisch gedämpft. Die eine der beiden reellen Wurzeln erhält einen hohen negativen Wert. Bei der gleichen Maschine und gleicher Geschwindigkeit ist $\Omega_3 = -2,71$ bzw. $\lambda_3 = -52,6$. Die Wurzel bedeutet also eine sehr schnelle Verkleinerung des Anfangsauschlages. Die zweite reelle Wurzel ist dagegen klein und im oberen Geschwindigkeitsbereich (d. h. über etwa 40 km/h) positiv.

Im gewählten Beispiel beträgt $\Omega_4 = 0,006$ bzw. $\lambda_4 = 0,117$. Dieser Wert beschreibt demnach eine sehr langsame Vergrößerung des Anfangsauschlages und zeigt damit einen instabilen Bewegungszustand des Kraftrades an. Die Instabilität kommt folgendermaßen zustande:

Man denke sich das Vorderrad auf einer Straßenbahnschiene geführt, das Hinterrad jedoch seitlich der Schiene stehend, was also einen Lenkeinschlag bedingt. Bewegt man nun das Vorderrad in gerader Richtung entlang der Schiene, so wird das Hinterrad entsprechend einer Schleppkurve immer mehr in die Spur des Vorderrades, also die Schiene, gezogen (Bild 3). Dadurch wird der anfangs vorgegebene Lenkein-

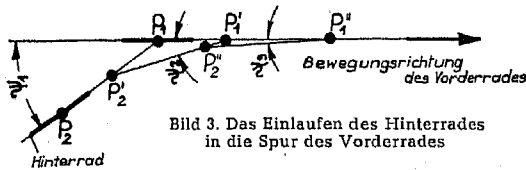


Bild 3. Das Einlaufen des Hinterrades in die Spur des Vorderrades

schlag ψ verkleinert und schließlich beseitigt. Je größer nun die Geschwindigkeit des Kraftrades ist, desto schneller verkleinert sich ein zur Stabilisierung herbeigeführter Lenkeinschlag. Die Wirkung dieser geringen Instabilität kann man beim Freihändigfahren unter entsprechender Selbstbeobachtung spüren, wenn man in einer Zeit von einigen Sekunden jeweils schwach durch Gewichtsverlagerung korrigieren muß, um das Fahrzeug aufrecht und in der Fahrtrichtung zu halten. Diese Korrektur bringt der Fahrer gewöhnlich unbewußt auf und im normalen Fahrbetrieb fühlt er diese kleine und unwichtige Instabilität nicht, da die Reaktionszeit sehr lang ist und die Korrekturbewegungen in den Störungen durch Fahrbahnunebenheiten und Windkräfte untergehen.

Bei niedriger Fahrgeschwindigkeit ist der Dämpfungsfaktor der Schwingung positiv, also bei Geschwindigkeiten unter ungefähr 20 km/h das Kraftrad durch Aufschaukeln der Schwingung instabil. Nur in dem schmalen Bereich von etwa 20 bis 40 km/h läuft das Einspurfahrzeug wirklich vollständig eigenstabil.

Die Wurzeln $\Omega_1, \dots, \Omega_4$ werden im oberen Geschwindigkeitsbereich, also ungefähr jenseits 40 km/h, alle konstant. Die dimensionsbehafteten Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_4 = \Omega_1, \dots, \Omega_4 \cdot v/l$, also damit Frequenz und Dämpfungsfaktor, wachsen demnach in diesem Bereich linear mit der Geschwindigkeit.

Bildet man die Wellenlänge in der Fahrspur

$$w_1 = 2 \pi / \gamma \cdot v$$

oder mit

$$\gamma = \lambda_v = v/l \cdot \Omega_v$$

$$w_1 = 2 \pi \cdot l / \Omega_v$$

so sieht man, daß diese im oberen Geschwindigkeitsbereich ebenfalls konstant bleibt. Der nasse Reifen des Kraftrades schreibt also stets das gleiche Schwingungsbild auf die trockene Straße, auch wenn die gleiche Maschine einmal mit 50 km/h und das nächstemal mit 150 km/h durch die Pfütze rollt.

Aus den homogenen Gleichungen, die aus den Bewegungsgleichungen durch Einsetzen des Ansatzes $k_1 \cdot e^{\Omega t}$ entstehen (und aus denen dann die Koeffizienten-Determinante gebildet wird), läßt sich das Amplitudenverhältnis von Lenkeinschlag zu Schräglage berechnen. Das Amplitudenverhältnis zeigt neben dem Verhältnis der Größtausschläge in den beiden Freiheitsgraden auch eine Phasenverschiebung der Schwingung an.

Zur Kontrolle dieser auf theoretischem Wege gewonnenen Erkenntnisse wurden Fahrversuche angestellt.

Versuchsbeschreibung

Zur Ermittlung des Bewegungsablaufes müssen das Kippen um die Spurlinie und der Lenkeinschlag während der Fahrt gemessen und aufgeschrieben werden. Zu diesem Zweck wurde ein Wachspapierschreibgerät auf dem Gepäckträger der Versuchsmaschine angebracht. Der eine Zeiger des Gerätes war über einen Hebel und einen Faden mit dem etwas verlängerten Lenker der Maschine verbunden. Den zweiten Zeiger betätigte eine horizontale Bezugsebene. Ferner wurde eine Zeitmarke auf den Meßstreifen gegeben.

Als horizontale Bezugsebene wurde in Ermangelung eines kostspieligen Kreislergerätes ein leichter, besonders gut gefederter Meßanhänger entwickelt, der drehbar an das Kraftrad gehängt die horizontale Lage auch bei geringen Unebenheiten beibehält (Bild 4 und 5).

Da die Eigenbewegung des Fahrzeugs zunächst ohne Beeinflussung durch den Fahrer und die Fahrbahn aufgenommen werden soll, hat die Messung nur auf einer ebenen Fahrbahn Sinn und wurde auf einer guten Autobahnstrecke durchgeführt.

Solange bei niedrigen Meßgeschwindigkeiten die Maschine noch nicht Freihändig lief, wurden vom Fahrer nur möglichst geringe Lenkkräfte zur Wahrung der Mittellage aufgebracht, um auch hier die Eigenbewegung wenigstens anzunähern. Sobald die Maschine ohne größere Gewichtsverlagerung Freihändig lief, wurde sie sich selbst überlassen. Die bei der ungestörten Geradeausfahrt vorkommenden Ausschläge sind sehr klein und bewegen sich in der Größenordnung von einigen 1/10 Grad. Zur Aufnahme des Bewegungsablaufes des Systems wurde deshalb von Zeit zu Zeit ein Störungsaus-schlag verursacht, indem der Fahrer gegen den Lenker der Maschine schlug und dadurch die Steuerung etwas verriß. Derartige Störungen kommen beim praktischen Fahrbetrieb dauernd vor; sei es, daß Unebenheiten das Vorderrad aus der Mittellage verdrehen oder der Fahrer unter dem Einfluß von Stößen unbeabsichtigt Kräfte am Lenker aufbringt. Beim Wiedereinpendeln entsteht der erwartete Bewegungsablauf.

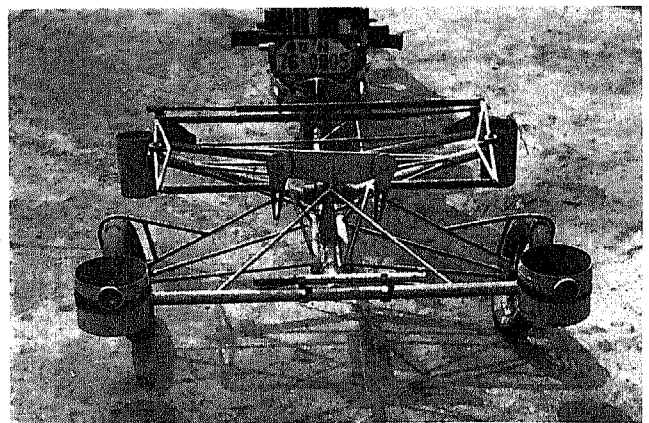


Bild 4. Der Meßanhänger am Kraftrad

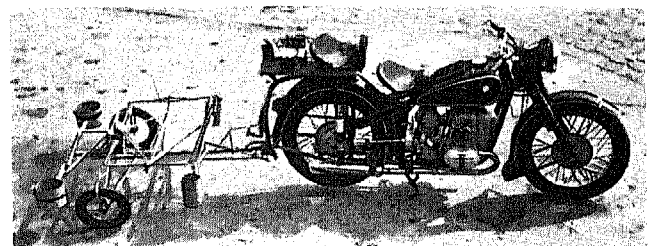


Bild 5. Meßeinrichtung zur Aufnahme des Bewegungsablaufes (Lenkeinschlag ψ und Schräglage θ_2)

Da die Maschine durch die Wirkung der Störung etwas von der geraden Fahrtriline abweicht und eine Kurve zu fahren beginnt, nähert sie sich nach einiger Zeit dem Rand der Fahrbahn, wo der bis dahin möglichst ruhig sitzende Fahrer eingreifen und sie abfangen muß. Nach der Rückkehr auf die Fahrbahnmitte wurde der Versuch dann jeweils wiederholt.

Die Bewegungsrichtung läuft auf den Meßstreifen von links nach rechts. Der Lenkeinschlag wird von der oberen Kurve beschrieben, die darunterliegende Kurve gibt die Schräglage wieder. Im unteren Teil des Meßstreifens befindet sich die Zeitmarke. Die Abstände der Rastpunkte betragen $\frac{1}{4}$ sek.

Die Versuche wurden an drei typischen Vertretern der Einspurfahrzeuge, einem Roller, einem leichten und einem schweren Kraftrad vorgenommen²⁾.

Einige Ergebnisse der Versuche sollen an Hand der Meßstreifen gezeigt und besprochen werden.

Versuchsergebnisse

Den Bewegungsablauf im unteren Geschwindigkeitsbereich zeigt Bild 6. Er wurde an der Vespa bei einer Geschwindigkeit von 10 km/h gemessen. (Die untersuchte Vespa wich jedoch von der Serienausführung durch größeren Nachlauf ab.) Da in diesem Bereich infolge des positiven Dämpfungsfaktors keine Eigenstabilität vorliegt, muß der Fahrer dauernd eingreifen. Wenn er sich aber dabei auf möglichst kleine Hilfen beschränkt, entsteht ein Bewegungsablauf, bei welchem die Schwingungszeit in guter Näherung mit der errechneten Zeit $T = 3,2$ sek übereinstimmt. Der Fahrer verhindert mit seinem feinfühligem Eingreifen also lediglich das Aufschaukeln der Schwingung. Die Amplitude der Schräglage ist kleiner als die des Lenkeinschlages. Im normalen Fahrbetrieb greift bei einer so geringen Geschwindigkeit der Fahrer stärker ein und diktiert den Ablauf der Bewegung. Die Schwingungszeit ist dann sehr unterschiedlich und meistens kürzer. Die beiden anderen Maschinen zeigen ähnliche Bewegungsbilder. Je schwerer eine Maschine ist, desto größer werden bei langsamer Fahrt die Lenkausschläge.

Bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h ergibt die Rechnung völlige Stabilität. Die Fahrpraxis bestätigt dieses Ergebnis: Die sich selbst überlassene Maschine behält ohne Hilfen des Fahrers die Mittellage bei. Allerdings muß der Fahrer einige Zeit nach Einleitung der Störung wegen der bereits erwähnten seitlichen Begrenzung der Fahrbahn eingreifen. Die Pfeile auf dem Meßblatt, Bild 7, auf welchem der Vorgang bei 30 km/h an der Vespa aufgenommen wurde, zeigen den Bereich an, in dem nach der Störung die Maschine sich selbst überlassen blieb. Die Dämpfung ist in Übereinstimmung mit der Rechnung bereits so groß, daß sich keine Periode in der Schwingung mehr ausbilden kann. Die berechnete Schwingungszeit beträgt 2,8 sek und wird vom Versuch bestätigt. Die Amplitude der Schräglage ist bei dem Schwingungsvorgang größer als die des Lenkeinschlages.

Während aber der Lenkeinschlag nach der Störung wieder auf Null zurückgeht, bleibt die Schräglage nach dem Abklingen der Schwingung erhalten und spielt im Meßbereich nicht wieder in die Null-Lage ein. Diese Erscheinung erklärt das Amplitudenverhältnis für das Zurückschnellen nach der Störung (ausgedrückt durch die große negative Wurzel Ω_3 bzw. λ_3). An dieser schnellen Bewegung nimmt nämlich die Schräglage und damit der schwere Rahmenteil der Maschine praktisch keinen Anteil. Deshalb verbleibt nach der Schwingung der Rahmen in der durch die Störung erzwungenen seitlichen Abweichung und würde sich erst sehr langsam der Null-Lage wieder nähern.

In Bild 8 ist ein Versuch mit der Vespa bei 60 km/h dargestellt. Im Lenkeinschlag herrscht Übereinstimmung der Dämpfung und der bei der aperiodischen Bewegung kaum

noch zu erkennenden Frequenz der Schwingung mit der Rechnung. Allerdings zeigt das Schwingungsbild der Schräglage jetzt eine Abweichung hinsichtlich der Dämpfung. Dagegen ergibt die Frequenz wieder Übereinstimmung mit der theoretisch ermittelten Schwingungszahl. Die Ursache für das etwas geringere Abklingen der Schwingung in der Schräglage dürfte in der mangelnden Verbundenheit zwischen Fahrer und Maschine zu suchen sein. Da der Fahrer beim Roller keinen Knieschluß hat, kann er an den bei höherer Geschwindigkeit schnelleren seitlichen Bewegungen nicht mehr voll teilnehmen. Desgleichen beeinflussen unwillkürliche Ausgleichbewegungen den Bewegungsablauf in diesem Freiheitsgrad.

Die gleiche Erscheinung tritt bei Soziusbetrieb am Kraftrad auf. Auch der Beifahrer ist ja nur mangelhaft mit der Maschine verbunden. Deshalb führt sein „Nachwackeln“ zu schwächerem Abklingen der Schwingungen in der Schräglage. Als Beispiel wird in Bild 9 eine Messung bei 60 km/h mit Beifahrer an der BMW R 51/3 angeführt. Der Lenkeinschlag pendelt sofort wieder in die Mittellage ein. Die Schräglage zeigt Schwingungen, deren Schwingungszeit nur um etwa 10% höher als die des Solobetriebes liegt. Die den Sozius voll berücksichtigende Rechnung darf hier also nicht angewandt werden.

Dagegen zeigt Bild 10 mit einer Messung an der Dürkopp MD 150 bei 60 km/h und Solobetrieb, daß hier auch die Schräglage eine aperiodische Bewegung ausführt und dann in dem durch die Störung herbeigeführten Ausschlag stehen bleibt, bis der Fahrer in der Nähe des Grünstreifens der Autobahn die Maschine abfängt.

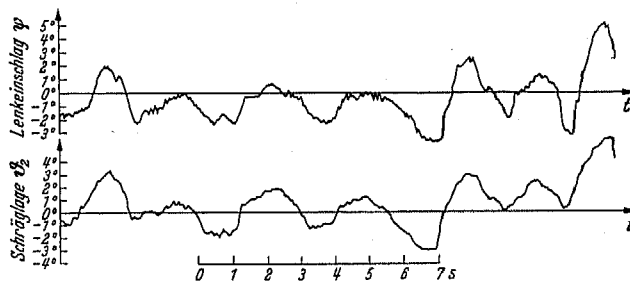


Bild 6. Bewegungsablauf bei der Vespa; $V = 10$ km/h

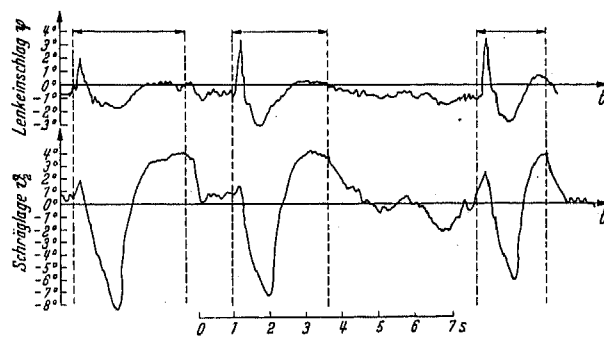


Bild 7. Bewegungsablauf bei der Vespa; $V = 30$ km/h

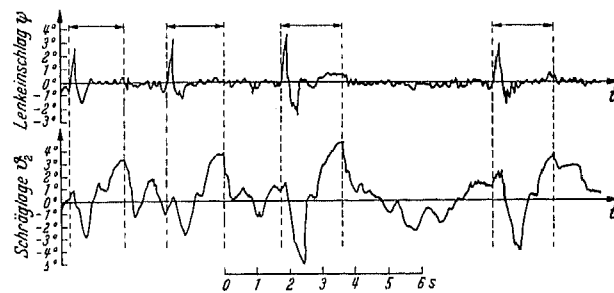
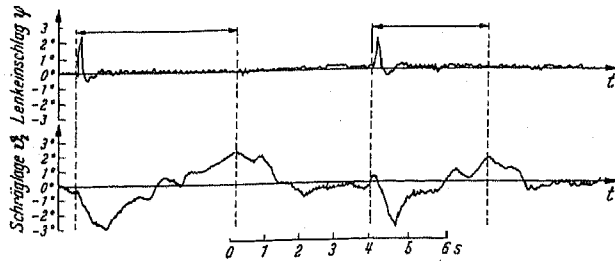
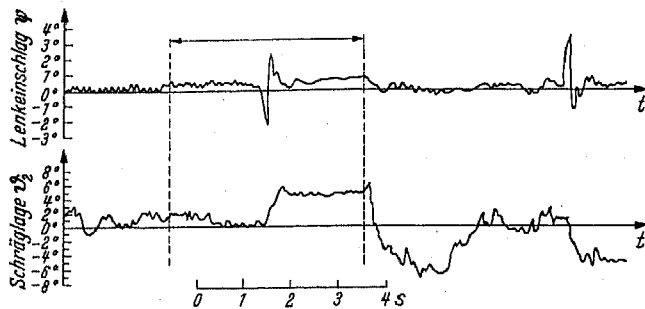
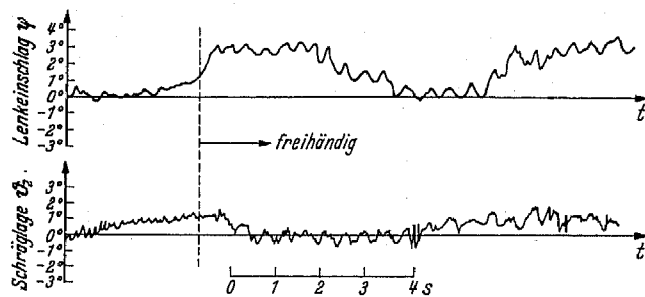


Bild 8. Bewegungsablauf bei der Vespa; $V = 60$ km/h

²⁾ Ein Vespa-Roller und eine Dürkopp MD 150 wurden dem Institut von den Herstellerfirmen zur Verfügung gestellt. Eine BMW R 51/3 wurde aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu diesem Zweck vom Werk gekauft.

Bild 9. Bewegungsablauf bei der BMW R 51/3 mit Beifahrer; $V = 60$ km/hBild 10. Bewegungsablauf bei der Dürkopp MD 150; $V = 60$ km/hBild 11. Bewegungsablauf bei der BMW R 51/3, ohne Beifahrer; $V = 120$ km/h

Messungen an einer Maschine, bei der durch Energiezufuhr trotz eines rechnerisch hohen Dämpfungsfaktors die Schwingung nicht aperiodisch abklingt, zeigen besonders deutlich, daß die Frequenz der Schwingung von der Rechnung ausgezeichnet erfaßt wird. Als Beispiel sei eine Messung an einer BMW R 51/3 bei 120 km/h (Solobetrieb) angeführt, Bild 11. Bei dieser Geschwindigkeit brauchte beim Versuch keine Störung mehr eingeleitet zu werden. Beim Loslassen des Lenkers traten von selbst die aufgezeichneten Schwingungen ein, deren Frequenz im Rahmen der Meß- und Rechengenauigkeit mit der Rechnung übereinstimmt. Die errechnete Schwingungszeit ist $T = 0,3$ sek. Die Abweichungen aus der Mittel-Lage wurden durch relativ starken Seitenwind hervorgerufen. (Auf die Ursachen dieser Schwingungserscheinung wird in einem späteren Bericht eingegangen.)

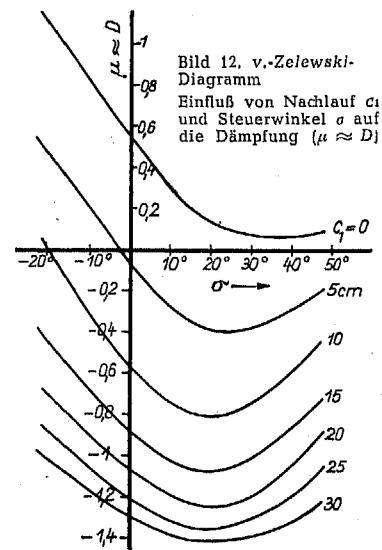
Die Nutzenanwendung der Untersuchungen

Die Messungen des Bewegungsablaufes zeigen, daß unter den getroffenen Annahmen bei (den für solche Untersuchungen ohnehin nur interessanten) Geschwindigkeiten von über 30 km/h der Bewegungsvorgang von der Rechnung in guter Näherung erfaßt wird. Diese Messungen wurden ergänzt durch Untersuchungen über die Lenkkräfte, die sich nicht nur auf die vom Fahrer am Lenker, sondern auch auf die durch Gewichtsverlagerung hervorgerufenen Einflüsse erstreckten. Sie bestätigen, daß die Annahme des sich selbst überlassenen Fahrzeugs bei der Berechnung der Bewegungsvorgänge auf ebener Fahrbahn gerechtfertigt ist und die beim praktischen Fahrbetrieb vorliegenden Verhältnisse tatsächlich annähernd erfaßt. Wird doch beim Befahren normaler, d. h. nicht ebener Fahrbahnen der theoretische Bewegungsablauf ledig-

lich von Stößen durch Unebenheiten oder Luftkräfte zerrissen. Gerade für diese Vorgänge ist die vorliegende Möglichkeit der Berechnung der Stabilität des Einspurfahrzeuges von Bedeutung, weil sie den Einfluß der verschiedenen Baugrößen des Krafttrades auf die Schwingungsfrequenz und den Dämpfungsfaktor als die beiden für stabile Fahreigenschaften und Sicherheit entscheidenden Größen zu untersuchen gestattet.

Eine möglichst hohe Dämpfung muß angestrebt werden, um die durch Fahrbahneinwirkungen angeregten Schwingungen schnell abklingen zu lassen bzw. zu unterdrücken. In der Nähe der Frequenz der Eigenschwingungen des Krafttrades sollte auf keinen Fall die Schwingungszahl irgendeines anderen schwingungsfähigen Teilbildes, zum Beispiel der gefederten Räder oder der gefederten Kraftübertragung, liegen, da sonst trotz hoher Dämpfung Energiezufuhr zum Aufschaukeln führen und Flattererscheinungen auslösen kann. Mechanische Steuerdämpfer sind ein Notbehelf.

Eine Anwendungsmöglichkeit der Stabilitätsrechnungen zeigt v. Zelewski³⁾. Er stellt durch mathematische Auswertung der Klein- und Sommerfeldschen Bewegungsgleichungen (für das Fahrrad) den Zusammenhang zwischen Nachlauf, Steuerwinkel und Dämpfungsfaktor dar. In Bild 12 ist das v. Zelewskische Diagramm abgebildet. Auf der Abszisse ist der Steuerwinkel σ aufgetragen. Die Ordinate stellt

Bild 12. v. Zelewski-Diagramm
Einfluß von Nachlauf c_1 und Steuerwinkel σ auf die Dämpfung ($\mu \approx D$)

einen dem Dämpfungsfaktor proportionalen Wert μ dar. Der Nachlauf c_1 tritt als Parameter auf. Das Bild zeigt, daß der Einfluß des Nachlaufes auf den Dämpfungsfaktor sehr groß ist, daß sich aber auch im Bereich heute gebräuchlicher Steuerwinkel ein Dämpfungsmaximum befindet. Das Diagramm ist für übliche mittlere Krafttrad-Baugrößen aufgestellt und kann natürlich nicht allgemeingültig benutzt werden. Es zeigt jedoch, wie für einzelne Maschinentypen auf theoretischem Wege die beiden wichtigen Baugrößen Steuerwinkel und Nachlauf ins optimale Verhältnis gebracht werden können.

Auf ähnliche Weise kann nun der Einfluß der anderen wichtigen Grundgrößen, z. B. der Trägheitsverhältnisse, der Schwerpunktlage, der Radgröße und der Motordrehrichtung untersucht werden, nachdem die Brauchbarkeit der linearisierten Bewegungsgleichungen gezeigt wurde.

Zusammenfassung

Der Bewegungsablauf von Einspurfahrzeugen wird berechnet und gemessen. Rechnung und Versuch zeigen ausreichende Übereinstimmung. Die Bewegung setzt sich aus einer Schwingung, einem Zurückschnellen in die Mittellage nach einer Störung und einem bei höherer Geschwindigkeit langsamen Anwachsen eines Anfangsausschlages zusammen. Die Dämpfung und die Schwingungsfrequenz sind für die Praxis von Bedeutung. Der Einfluß der Baugrößen des Einspurfahrzeuges auf den Bewegungsablauf kann mit Hilfe der angeführten Berechnungen untersucht werden. Dadurch wird eine Möglichkeit geboten, die Fahrwerke von Einspurfahrzeugen zu vervollkommen und die Fahrsicherheit zu vergrößern.

³⁾ Unveröffentlichte Mitteilung an die ATG, 1949.