BULLETIN DE LA S. M. F.

C. BOURLET

Étude théorique sur la bicyclette

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 76-96.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__76_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉTUDE THÉORIQUE SUR LA BICYCLETTE;

Par M. C. Bourlet.

Deuxième Partie.

23. Dans la recherche des conditions d'équilibre d'une bicyclette, nous supposerons toujours, dans la suite, que le bicycliste fait tourner ses pédales d'un mouvement uniforme. En d'autres termes, nous admettrons que la vitesse v du déplacement du point de contact A de la roue motrice avec le sol, vitesse que nous appellerons *vitesse de la machine,* est *constante.*

C'est d'ailleurs là l'hypothèse la plus conforme à la réalité.

On pourrait, il est vrai, étudier *théoriquement* l'influence de la variation de la vitesse v sur l'équilibre; mais ce serait là une étude d'un intérêt purement théorique, qui ne correspondrait à rien de pratique.

En se servant des équations (29) ou (29 *bis*) on pourrait facilement montrer que l'équilibre peut être complètement réalisé par de simples variations de vitesse; mais les résultats curieux auxquels on serait conduit seraient pratiquement irréalisables.

Vu l'inertie de sa masse, le cycliste ne peut faire varier sa vitesse que d'une façon relativement lente et en admettant même, ce qui est tout à fait improbable, qu'il puisse acquérir le sens instinctif de la grandeur de la variation de vitesse nécessaire, à chaque instant, pour maintenir l'équilibre, il ne pourrait jamais, pratiquement, obtenir assez rapidement cette variation pour qu'elle fût efficace.

De telles oscillations de vitesse fatigueraient d'ailleurs, à la fois, le cycliste et sa bicyclette.

24. Cette restriction première faite, définissons l'*équilibre.*

Une bicyclette est en équilibre lorsqu'elle ne glisse pas latéralement.

Or, pour que la machine ne glisse pas, il faut et il suffit que l'angle β du plan moyen avec la normale au sol ne dépasse pas, en valeur absolue, une valeur limite φ qu'on appelle l'*angle de frottement de glissement latéral.*

Donc, *pour qu'une bicyclette décrivant une trajectoire* (T) *donnée, à une vitesse v connue, soit en équilibre, il faut et il suffit que l'angle β fourni par l'équation différentielle* (29) *vérifie la double inégalité*

$$-\varphi < \beta < \varphi. \tag{30}$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\varphi = f,$$

f est ce qu'on appelle le *coefficient de frottement de glissement latéral* de la machine, et la condition (30) s'écrit

$$-f < \operatorname{tang}\beta < +f.$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° L'équation (29) est vérifiée par une valeur *constante* de β. Pour qu'il y ait équilibre il *suffit* alors que β ait cette valeur et qu'en outre l'inégalité (30) soit satisfaite.

Le plan moyen conserve une inclinaison constante par rapport au sol; c'est ce que nous appellerons l'*équilibre parfait.*

2° S'il n'existe pas d'intégrale de l'équation (29) qui se réduise à une constante, le plan moyen oscillera entre deux positions extrêmes; *son inclinaison par rapport au sol sera variable.* Nous dirons alors que *l'équilibre est imparfait.*

Nous allons étudier ces deux cas séparément.

Équilibre parfait sur un sol horizontal.

25. D'après notre définition même, il y a équilibre parfait si β reste constant.

Or, ceci ne peut avoir lieu que si la trajectoire (T) de la roue d'arrière est convenablement choisie. En effet, en écrivant que l'équation (29) est vérifiée par une valeur constante de β, on a une relation qu'on peut considérer comme une équation différentielle du premier ordre en ρ et s, dans le cas du sol horizontal, car on a

$$t = \frac{s}{v} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{b}{\rho}.$$

En intégrant cette équation, on obtiendra une famille de courbes (T) que nous nommerons les *courbes d'équilibre parfait* et que nous allons d'abord rechercher.

A cet effet, prenons l'équation pratique (29 *bis*) du n° 22; supposons-y β constant et remplaçons dt par $\frac{ds}{v}$. Nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{Q}{d}\frac{1}{\rho} = \frac{g}{v^2 d}\operatorname{tang}\beta,$$

en posant

$$Q = 1 + \frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right);$$

on en tire, en intégrant,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang}\beta}{Q v^2} + H e^{-\frac{Q}{d}s}, \tag{31}$$

H étant une constante arbitraire.

Distinguons alors plusieurs cas :

1° Si $H = 0$, $\frac{1}{\rho}$ est constant : la courbe est un *cercle* ou une *droite*.

2° Si $H \neq 0$, et $\beta \neq 0$: la courbe est une *spirale* qui est rapidement asymptote au cercle de rayon $\frac{Q v^2}{g \operatorname{tang}\beta}$ (car, comme $s = vt$, s est positif et croît).

3° Si $H \neq 0$, et $\beta = 0$: la courbe est asymptote à une droite (car quand s croît, $\frac{1}{\rho}$ tend vers zéro).

Dans les cas où H est différent de zéro, la détermination de la courbe se termine par deux quadratures. On a, en effet, en posant

$$\psi = \int \frac{ds}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang}\beta}{Q v^2} s - \frac{Hd}{Q} e^{-\frac{Q}{d}s} + \psi_0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \int \cos\psi \, ds + x_0, \\ y &= \int \sin\psi \, dt + y_0. \end{aligned} \right.$$

Les courbes d'équilibre parfait dépendent donc, en apparence, de cinq paramètres arbitraires, β, H, ψ_0, x_0 et y_0. En fait, il n'y en a que *quatre;* et il y en a trois qui sont des paramètres de position.

La *forme* de la courbe ne dépend que de β.

Remarquons, en effet, que lorsque $H \neq 0$, $\beta \neq 0$, on peut écrire l'équation (31) sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang} \beta}{Q v^2} \left[1 \pm e^{-\frac{Q}{d}(s - s_0)} \right],$$

en prenant, dans le crochet, le signe (+) ou le signe (—) suivant que H est positif ou négatif, s_0 étant une nouvelle constante arbitraire.

Si, alors, on compte les arcs sur la courbe à partir du point pour lequel, actuellement, $s = s_0$, l'équation (31) prend la forme

$$\text{(31 bis)} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang} \beta}{Q v^2} \left(1 \pm e^{-\frac{Q}{d} s} \right),$$

qui ne contient plus de constante arbitraire.

Il n'y a donc, en réalité, que quatre constantes : x_0, y_0, ψ_0 et β. Les trois premières sont des constantes de position; quand elles varient, la courbe ne change pas de forme, mais se déplace uniquement dans le plan.

Au point de vue de la forme, il n'y a donc que *trois* familles de courbes, chacune à un paramètre β : à savoir, les cercles (ou droites) et les deux spirales fournies par l'équation (31 *bis*).

Nous ferons maintenant, de suite, une remarque de la plus haute importance :

Étant donnée, dans le plan du sol, une courbe quelconque et un point A *sur cette courbe, on peut toujours trouver une courbe d'équilibre parfait passant par ce point* A *et ayant, en ce point, un contact* du troisième ordre *avec la courbe donnée.*

Prenons, en effet, le point A pour origine des coordonnées et pour axe des x la tangente en A à la courbe donnée.

Toutes les courbes d'équilibre parfait passant en A et tangentes en A à l'axe des x, seront données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{g \operatorname{tang} \beta}{Q v^2} s - \frac{H d}{Q}\left(1 - e^{-\frac{Q}{d} s}\right), \\ x &= \int_0^s \cos\psi \, ds, \\ y &= \int_0^s \sin\psi \, ds. \end{aligned}\right.$$

Or, ces équations contenant deux constantes arbitraires β et H, on peut toujours les choisir de façon que, pour $s = 0$, la courbe d'équilibre parfait et la courbe donnée aient la même courbure $\frac{1}{\rho}$ et même seconde courbure : $\frac{d\psi}{d\rho}$.

Cette proposition capitale nous sera très utile dans la suite.

26. D'après ce que nous venons de voir, le long d'une courbe d'équilibre parfait,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{Q}{d}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{Q}{d} + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

est constant, ψ désignant l'angle de la tangente à la courbe avec une direction fixe.

Pour qu'il y ait équilibre le long de cette courbe, il suffit donc que l'angle β soit constant et que l'on ait

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{v^2}{\rho g}\left[Q + d\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{32}$$

avec

$$\operatorname{tang}\beta < f.$$

Si l'on désigne par ρ_1 le rayon de seconde courbure

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\psi},$$

l'égalité (32) peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{v^2}{\rho g}\left[Q - \frac{\rho_1 d}{\rho^2}\right].$$

Pratiquement, comme d est petit et que Q est voisin de 1, si la courbure $\frac{1}{\rho}$ varie lentement, la valeur numérique du crochet sera voisine de 1, et l'on aura, sensiblement,

$$\tag{32 bis} \operatorname{tang}\beta = \frac{v^2}{\rho g},$$

formule qui, d'ailleurs, serait plus strictement applicable au cas du cercle, sur lequel nous reviendrons plus loin.

27. Avant de continuer, nous ferons ici une petite digression. La spirale d'équilibre parfait, définie par l'équation intrinsèque

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang}\beta}{Q v^2}\left(1 - e^{-\frac{Q}{d}s}\right),$$

présente un intérêt tout spécial dans la théorie du *virage*.

Dans cette courbe, en effet, pour $s = 0$, ρ est infini; elle a donc, en ce point, un contact du deuxième ordre avec une droite. Si, ensuite, on ne prend, à partir de $s = 0$, qu'un *petit* arc de cette courbe, on a sensiblement, le long de cet arc,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g \operatorname{tang}\beta}{v^2 d} s.$$

Ce petit arc se confond donc avec celui d'une courbe dans laquelle la courbure est proportionnelle à l'arc.

Dans notre *Nouveau Traité* nous avons eu occasion de considérer cette dernière courbe que nous avons appelée *courbe de Cornu* et nous avons montré que c'était l'arc de raccordement de la ligne droite au cercle, lorsqu'un cycliste effectue un virage.

Le raisonnement que nous avons fait dans notre Ouvrage ([1]) présente une petite lacune que nous allons pouvoir combler.

Nous avons prouvé, en effet, que l'arc de Cornu est, sensiblement, celui que décrit la machine, dans un temps très court, lorsqu'on tourne le guidon avec une vitesse angulaire à peu près constante, en quittant la ligne droite. Pour être complet, il nous

---

([1]) *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes*, 1re Partie, p. 114 à 127.

aurait encore fallu prouver que *l'équilibre était possible* sur cet arc. Or ce qui précède suffit à faire cette preuve, puisque cet arc de Cornu coïncide avec une *courbe d'équilibre parfait.*

Pour effectuer un virage, il suffit donc que le cycliste provoque, par un mouvement brusque du buste, l'inclinaison du plan moyen. Il décrira ensuite la courbe d'équilibre parfait (ou arc de Cornu) correspondant à cette inclinaison, jusqu'à ce qu'il ait atteint le rayon de courbure du virage circulaire à décrire.

28. Les discussions précédentes nous ont prouvé que le cercle est toujours une courbe d'équilibre parfait et que les autres courbes sont des spirales rapidement asymptotes à des cercles.

Pour cette raison, le cercle a *pratiquement* une importance toute spéciale et peut être considéré comme la seule courbe d'équilibre parfait sur un sol horizontal. Nous croyons donc utile d'examiner ce cas d'une façon beaucoup plus approfondie, en prenant, non pas l'équation approchée (29 *bis*) mais l'équation *complète* (29).

ρ étant ici constant, l'angle θ l'est également et la valeur de l'angle β pour laquelle il y a équilibre parfait est donnée par l'équation (29) du n° **21** où l'on annule toutes les dérivées de β, θ, β' et ρ.

L'équation qui fournit β est alors

$$(33) \qquad N_f + N'_f + N''_f + N'_c + N''_c + N_p + N'_p + N''_p = 0,$$

où l'on a

$$N_f = \frac{v^2}{\rho}\mathfrak{M}h\cos\beta - (A - B + \mathfrak{M}h^2)\frac{v^2}{\rho^2}\cos\beta\sin\beta,$$

$$N'_f = \frac{v^2}{\rho}mr\cos\beta - (E - F + mr^2)\frac{v^2}{\rho^2}\cos\beta\sin\beta,$$

$$N''_f = \frac{v^2}{\rho}m'r'\cos\beta' - (E' - F' + m'r'^2)\frac{v^2}{\rho^2}\cos\beta'\sin\beta'\cos\theta,$$

$$N'_c = \frac{E}{r}\frac{v^2}{\rho}\cos\beta, \qquad N''_c = \frac{E'}{r'}\frac{v^2}{\rho}\cos\beta',$$

$$N_p = -\mathfrak{M}gh\sin\beta, \qquad N'_p = -mgr\sin\beta,$$

$$N''_p = -m'gr'\sin\beta'\cos\theta.$$

Dans ces égalités, il faut toujours supposer que β' a été remplacé, en fonction de β et θ, par sa valeur fournie par la formule (22) du n° **16**.

L'équation (33) ainsi obtenue est assez compliquée. Nous allons y rechercher les termes principaux pour lui substituer une équation approchée et, vu l'importance pratique de ce cas, nous chercherons l'ordre de grandeur des approximations que nous ferons.

Remarquons tout d'abord que β' et $\cos\theta$ ne figurent explicitement que dans N''_f, N''_c, N''_p, c'est-à-dire dans les termes qui proviennent de la roue d'avant. Or chacun de ces termes a des analogues de même signe dans les groupes provenant de l'ensemble $\mathcal{E}$ et de la roue d'arrière, et le rapport d'un terme de la roue d'avant à l'ensemble des termes analogues (qui ont même signe) est en moyenne de l'ordre de grandeur de $\frac{m'r'}{Ml}$.

Or on a, en moyenne,

$$l = 1^{\mathrm{m}},25, \qquad r' = 0^{\mathrm{m}},35, \qquad Mg = 80^{\mathrm{kg}}, \qquad m'g = 3^{\mathrm{kg}};$$

par suite,

$$\frac{m'r'}{Ml} = \frac{1}{100} \text{ (environ)}.$$

β' et $\cos\theta$ ne figurent donc que dans des termes qui, en moyenne, ne représentent chacun que le $\frac{1}{100}$ des termes de même forme et de même signe. Si donc, dans ces termes, nous remplaçons β' et $\cos\theta$ par les valeurs approchées β et 1, nous ferons, sur le premier membre de l'équation, une erreur relative beaucoup plus petite que $\frac{1}{100}$.

Cette approximation revient au fond, comme on le voit, *à ne pas tenir compte du changement de forme du système résultant de la rotation du guidon.*

Un calcul facile, quoique un peu long, montrerait que l'erreur relative commise sur le premier membre de l'équation, en ne tenant pas compte, d'une part, du mouvement des jambes et, d'autre part, du déplacement de la base par rapport à la trace du plan moyen, serait aussi environ $\frac{1}{100}$, plutôt supérieure. On en conclut que, pratiquement, il est illusoire de conserver β' dans l'équation (33) et qu'on ne diminue pas son degré d'exactitude en remplaçant β' par β et $\cos\theta$ par 1.

Faisons cette substitution et remarquons, comme au n° 22, que l'on a

$$M = \mathfrak{M} + m + m',$$
$$M\,l = \mathfrak{M}\,h + mr + m'r',$$
$$M(l^2 + k^2) = C + \mathfrak{M}\,h^2 + F + mr^2 + F' + m'r'^2,$$

Mk^2 étant, comme plus haut, le moment d'inertie de l'ensemble du cavalier et de sa machine par rapport à un axe parallèle à AB et passant par son centre de gravité, lorsque le guidon est droit.

D'ailleurs, d'après les propriétés connues des ellipsoïdes d'inertie, on a

$$A - B < C, \qquad E - F < F, \qquad E' - F' < F';$$

on en conclut

$$\begin{aligned} &A - B + \mathfrak{M}\,h^2 + E - F + mr^2 + E' - F' + m'r'^2 \\ &\quad < C + \mathfrak{M}\,h^2 + F + mr^2 + F' + m'r'^2, \end{aligned}$$

ou

$$A - B + \mathfrak{M}\,h^2 + E - F + mr^2 + E' - F' + m'r'^2 < M\,(l^2 + k^2).$$

On peut donc poser

$$A - B + \mathfrak{M}\,h^2 + E - F + mr^2 + E' - F' + m'r'^2 = \eta\,M\,(l^2 + k^2),$$

η étant un coefficient numérique plus petit que 1.

Avec ces notations, on parvient, finalement, à l'équation suivante :

$$\left(M\,l + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta - \eta\,M\,(l^2 + k^2)\,\frac{v^2}{\rho^2}\cos\beta\sin\beta - M\,lg\sin\beta = 0 \tag{33 bis}$$

qui détermine l'angle β d'équilibre parfait lorsque la machine décrit un cercle de rayon ρ.

Les conclusions précédentes se résument de la façon suivante :

1° *Si l'on ne tient pas compte des mouvements du cycliste par rapport à sa bicyclette, il est illusoire de tenir compte, dans les calculs, du changement de forme du système, résultant de la rotation du guidon.*

2° *En supposant le cavalier immobile par rapport à la machine et celle-ci de forme invariable, mais en tenant compte de la rotation des roues, il suffit pour que la bicyclette soit en* *équilibre, en décrivant un cercle de rayon* ρ, *qu'elle fasse avec le sol un angle constant dont le complément* β *vérifie l'équation* (33 *bis*) *et que cet angle* β *soit tel que l'on ait*

$$(34) \qquad \tang\beta < f.$$

29. L'équation (33 *bis*), quoique déjà simple, ne l'est pas encore assez pour les applications pratiques, car elle est complète et du quatrième degré en $\tang\beta$.

Nous allons encore la réduire. Écrivons-la, à cet effet, sous la forme suivante :

$$(33\ ter) \qquad \tang\beta = \frac{v^2}{\rho g}\left[1 + \frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right) - \frac{\eta}{\rho}\left(l + \frac{k^2}{l}\right)\sin\beta\right].$$

Le coefficient de frottement de glissement f est compris entre 0,2 et 0,3 [1]; on en conclut, à cause de la relation (34),

$$\sin\beta < 0,2.$$

D'autre part, en moyenne, dans une bicyclette,

$$l + \frac{k^2}{l} = 1^{m},50$$

et comme $\eta < 1$, on a

$$\frac{\eta}{\rho}\left(l + \frac{k^2}{l}\right)\sin\beta < \frac{0,3}{\rho}.$$

Par suite, pour tout cercle de rayon ρ supérieur ou égal à 10^{m}, on a

$$\frac{\eta}{\rho}\left(l + \frac{k^2}{l}\right)\sin\beta < 0,03.$$

La quantité E est le moment d'inertie de la roue d'arrière par rapport à son axe. Ce moment d'inertie est plus faible que celui d'une roue homogène de même masse et de même rayon; on a donc

$$E < \frac{1}{2}mr^2.$$

En supposant, par exemple, les deux roues identiques, ce qui

---

[1] Voir *Nouveau Traité*, 1re Partie, pages 139 à 142.

a lieu dans presque toutes les bicyclettes, on en conclut

$$\frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r}+\frac{E'}{r'}\right)<\frac{mr}{Ml}=0,01 \text{ (environ).}$$

Si donc, dans le crochet de la formule qui donne tang β, on néglige les deux derniers termes, on aura une valeur approchée de β pour laquelle, dans les cas usuels où le rayon ρ ne tombe pas au-dessous de 10^m, l'erreur *relative* est plus petite que $\frac{3}{100}$.

Pratiquement, la formule

$$\tan\beta=\frac{v^2}{\rho g} \tag{35}$$

est donc largement suffisante.

En premier lieu, supprimer, dans l'équation (33 *ter*), le terme $\frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r}+\frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho g}$, revient à admettre que les roues ne tournent pas.

Dans l'équation (33 *bis*) le terme correspondant vient s'ajouter au terme $Ml\frac{v^2}{\rho}\cos\beta$. L'effet de la rotation des roues est donc d'augmenter dans l'équation (33 *bis*) le coefficient de $\frac{v^2}{\rho}\cos\beta$. Tout se passe, par conséquent, comme si les forces centrifuges agissaient sur une masse plus grande sans que le poids total fût modifié.

La rotation des roues augmente donc l'inertie du système et, par suite, la stabilité.

Mais la discussion numérique qui précède prouve qu'à cause de la grande légèreté des roues cette influence de la rotation des roues est tout à fait négligeable par rapport à celle des forces centrifuges, qui seules interviennent effectivement dans le maintien de l'équilibre.

En second lieu, la suppression du terme $\frac{\eta v^2}{\rho^2 g}\left(l+\frac{k^2}{l}\right)\sin\beta$, dans l'équation (33 *ter*), revient, approximativement, à admettre que les forces centrifuges ont une résultante unique appliquée au centre de gravité.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'une théorie élémentaire, telle que celle que j'ai exposée dans mon Traité, dans laquelle on fait cette hypothèse, conduit précisément à la formule (35).

En somme, en désignant par α l'angle d'inclinaison du plan moyen sur le sol, angle qui est le complément de β, on peut énoncer les conclusions finales que voici :

Le point de contact de la roue-arrière décrivant, sur un sol horizontal, un cercle de rayon ρ, *à la vitesse constante* v, *il suffit, pour qu'il y ait équilibre, que l'angle d'inclinaison* α *du plan moyen reste constant et que l'on ait* (*avec une erreur relative plus petite que* 0,03)

$$\tang \alpha = \frac{\rho g}{v^2}, \tag{36}$$

avec

$$\tang \alpha > \frac{1}{f}. \tag{37}$$

Ce sont exactement celles que j'ai énoncées dans mon *Nouveau Traité* (1[re] Partie, p. 46).

Je renverrai donc le lecteur à ce Volume pour tout ce qui concerne les conséquences qu'on peut tirer de ces conclusions.

Mon but ici était surtout de *justifier* la formule pratique (36) et d'*évaluer l'erreur commise.*

30. Il nous reste, pour terminer l'étude de l'équilibre parfait sur sol horizontal, à voir si cet équilibre est stable.

Supposons donc que la bicyclette décrive un cercle de rayon ρ et soit β_0 l'angle d'équilibre parfait correspondant. Troublons infiniment peu l'équilibre et soit $\beta_0 + \varepsilon$ la nouvelle valeur de β, l'équation (29 *bis*) nous fournira l'accélération angulaire $\frac{d^2\beta}{dt^2}$:

$$M(l^2 + k^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} = M l g \sin(\beta_0 + \varepsilon) - \left(M l + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos(\beta_0 + \varepsilon).$$

Or, β_0 étant l'angle d'équilibre, on a

$$M l g \sin\beta_0 - \left(M l + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta_0 = 0;$$

on en conclut

$$M(l^2 + k^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} = \sin\varepsilon\left[M l g \cos\beta_0 + \left(M l + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\sin\beta_0\right].$$

La quantité entre crochets est toujours positive : il en résulte que $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ et ε sont de même signe.

L'équilibre est donc instable.

En d'autres termes, lorsque la machine décrit *rigoureusement* un cercle, c'est-à-dire *lorsque le cycliste ne fait aucun mouvement du guidon, l'équilibre est instable.*

Ce n'est que grâce à la mobilité du guidon et, par suite, en modifiant légèrement, à chaque instant, sa trajectoire que le cycliste parvient à maintenir l'équilibre.

Les équations (29 *bis*) et (29 *ter*) du n° 22 peuvent servir utilement à faire l'étude du rétablissement et du maintien de l'équilibre *au moyen du guidon.*

M. Boussinesq (*loc. cit.*) emploie l'équation (29 *bis*) dans le cas de la marche en ligne droite; moi-même, dans mon *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes* (1er Vol., p. 68 à 81), j'ai fait usage de l'équation (29 *ter*) pour formuler des conclusions pratiquement suffisantes. Je crois inutile de les reproduire ici.

Je ferai cependant une remarque finale qui a son importance.

Les discussions de M. Boussinesq et les miennes ont montré que *théoriquement* le maintien de l'équilibre par le guidon est *possible.*

Au point de vue pratique cela ne suffit pas.

Pour qu'en fait cet équilibre ne soit pas une acrobatie, il faut encore que les mouvements du guidon, nécessaires à son maintien, soient faciles à exécuter et puissent devenir instinctifs. Pour cela il faut que la bicyclette ait une forme telle que *naturellement* le guidon ait des tendances à se mouvoir dans le sens favorable au maintien de l'équilibre. Les mains du cycliste n'ont plus alors qu'à suivre le guidon et à régler ses mouvements.

Ceci revient à dire que, pour que l'équilibre théorique soit pratiquement réalisable, guidon en mains, il faut que, dans une certaine mesure, la machine s'équilibre d'elle-même lorsqu'on abandonne le guidon.

Une bicyclette n'est bien stable que si elle donne un bon *lâche-mains.* L'étude de l'équilibre sans les mains est donc, au point de vue pratique, de la plus haute importance.

Comme nous l'avons dit au début, les données expérimentales nous manquent pour pouvoir faire une étude *précise* de cette question; cependant, en me bornant à des considérations tout à fait élémentaires, j'ai pu, dans mon *Nouveau Traité* (1er Vol.,

p. 87 à 107), la serrer d'assez près pour pouvoir formuler des règles pratiques de construction d'une bicyclette stable, que l'*expérience* a sanctionnées.

Les raisons qui précèdent fournissent l'explication de la difficulté de la marche en arrière, sur une bicyclette ordinaire (*loc. cit.*, p. 32 à 37).

Équilibre parfait sur un sol incliné.

31. Lorsque le plan du sol fait avec un plan horizontal un angle ω, l'équation différentielle qui donne β en fonction du temps est, en faisant des approximations analogues à celles que nous avons faites pour écrire l'équation (29 *bis*) du n° **21**,

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}(l^2+k^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} &= \mathrm{M}lg[\sin\beta\cos\omega - \sin\omega\cos\beta\sin\psi] \\ &\quad - \left(\mathrm{M}l+\frac{\mathrm{E}}{r}+\frac{\mathrm{E}'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta - \mathrm{M}ld\cos\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right),\end{aligned}\right.$$

où ψ désigne l'angle que fait la base AB de la machine avec une ligne de plus grande pente du plan du sol.

Le long d'une courbe d'équilibre parfait β est constant. Une telle courbe vérifie donc l'équation

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}lg(\sin\beta\cos\omega - \sin\omega\cos\beta\sin\psi)\\ &\quad - \left(\mathrm{M}l+\frac{\mathrm{E}}{r}+\frac{\mathrm{E}'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta - \mathrm{M}ld\cos\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right) = 0.\end{aligned}$$

On voit alors, immédiatement, que toutes les droites du plan du sol vérifient cette équation, car le long d'une droite ψ est constant et $\frac{1}{\rho}$ est nul.

Il suffit, alors, pour qu'il y ait équilibre, que l'on ait

$$(39)\qquad \operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\omega\sin\psi.$$

Pour trouver toutes les autres courbes, remarquons que, la droite AB étant la tangente en A à la courbe (T) de rayon de courbure ρ, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds};$$

par suite, en supposant toujours la vitesse v constante,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right) = v\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$(40)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{Q}{d}\frac{1}{\rho}=\frac{g}{v^2 d}[\operatorname{tang}\beta\cos\omega-\sin\omega\sin\psi];$$

ce qui est une équation différentielle du premier ordre entre $\frac{1}{\rho}$ et ψ.

Dès que cette équation est intégrée, si l'on prend dans le plan du sol deux axes rectangulaires Ox, Oy tels que Ox soit une ligne de plus grande pente, on a les courbes d'équilibre parfait par deux quadratures

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} x&=\int\cos\psi.\rho\,d\psi+x_0,\\ y&=\int\sin\psi.\rho\,d\psi+y_0,\end{aligned}\right.$$

où il faut imaginer que ρ est connu en fonction de ψ.

Ces courbes, comme dans le cas du plan horizontal, dépendent de quatre constantes arbitraires; mais, ici, il n'y a que *deux* paramètres de position x_0, y_0 et, au point de vue de la forme, elles dépendent de deux paramètres [β et la constante d'intégration de l'équation (40)].

Ceci s'explique aisément.

Dans le cas du plan horizontal, dès qu'on a une courbe d'équilibre parfait on en a une infinité d'autres en transportant celle-ci d'une manière *quelconque* dans son plan.

Au contraire, dans le cas du sol incliné, une courbe d'équilibre parfait reste telle lorsqu'on la transporte parallèlement à elle-même, mais elle perd, en général, cette propriété lorsqu'on la fait tourner dans son plan.

L'importante remarque énoncée au n° 25 subsiste encore ici.

Étant donnés, dans le plan du sol, une courbe quelconque et un point A *sur cette courbe, il existe toujours une courbe d'équilibre parfait passant en* A *et ayant, en ce point, un contact* du troisième ordre *avec la courbe donnée.*

Soient, en effet, ψ_0 l'angle de la tangente à la courbe en A, avec une ligne de plus grande pente; x_0, y_0 les coordonnées de A.

On peut toujours choisir β et la constante d'intégration de l'équation (40) de façon que cette équation admette une intégrale telle que, pour $\psi = \psi_0$, $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ aient les mêmes valeurs que sur la courbe donnée en A. En prenant pour ρ cette intégrale, les formules suivantes

$$x = \int_{\psi_0}^{\psi} \cos\psi.\rho\, d\psi + x_0,$$
$$y = \int_{\psi_0}^{\psi} \cos\psi.\rho\, d\psi + y_0$$

fourniront la courbe d'équilibre parfait cherchée.

Au point de vue analytique, dès qu'on se donne β et la valeur initiale de $\frac{1}{\rho}$, pour une valeur donnée de ψ, l'intégrale est déterminée.

Il y a cependant une exception curieuse.

Considérons, en effet, une droite quelconque du plan du sol faisant avec une ligne de plus grande pente un angle ψ_0. Prenons

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\omega \sin\psi_0.$$

L'équation (40) s'écrit alors

$$(40\,bis) \qquad \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{Q}{d}\right] = \frac{g}{v^2 d}\sin\omega(\sin\psi_0 - \sin\psi).$$

Si l'on cherche alors l'intégrale de cette équation, telle que, pour

$$\psi = \psi_0, \qquad \frac{1}{\rho} = 0.$$

l'équation (40 *bis*) ne fournit pas *immédiatement* la valeur de $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ qui se présente sous forme indéterminée. Pour avoir cette valeur, il faut prendre la dérivée de l'équation (40 *bis*), puis y faire $\frac{1}{\rho} = 0$, $\psi = \psi_0$. On trouve ainsi, pour $\left[\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_0 = u_0$, l'équation du second degré

$$u_0^2 + \frac{Q}{d}u_0 + \frac{g}{v^2 d}\sin\omega\cos\psi_0 = 0.$$

Elle donne deux valeurs pour u_0, toutes deux finies et différentes de $-\frac{Q}{d}$, si $\cos\psi_0 \neq 0$. Il y a donc, dans ce cas, *deux* courbes intégrales répondant aux conditions initiales données. Pour ces courbes, la direction $\psi = \psi_0$ est une direction asymptotique. On a, en effet, en posant $\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = u$,

$$ds = \rho\, d\psi = \frac{u + \frac{Q}{d}}{\sin\psi_0 - \sin\psi}\, \frac{v^2 d}{g \sin\omega}\, d\psi\,;$$

on voit alors que, pour $\psi = \psi_0$, l'élément ds est comparable à $\frac{d\psi}{\psi - \psi_0}$, puisque $u + \frac{Q}{d}$ ne s'annule pas ; et, par suite, pour $\psi = \psi_0$, s devient infini comme $\log(\psi - \psi_0)$. A toute droite du plan correspondent donc *deux* courbes d'équilibre parfait qui lui sont asymptotes.

C'est un fait tout semblable à celui que nous avons trouvé dans le cas du sol horizontal.

32. Ceci posé, le long d'une courbe d'équilibre, la quantité

$$\frac{v^2}{\rho g}\left[Q + d\,\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + \sin\omega \sin\psi$$

reste constante.

Pour qu'il y ait équilibre, il suffit donc que l'angle β *soit constant et que l'on ait*

$$\text{(42)} \qquad \tan\beta = \frac{v^2}{\rho g \cos\omega}\left[Q + d.\frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] + \tan\omega \sin\psi$$

avec

$$\tan\beta < f.$$

Si l'on désigne par ρ_1 le rayon de seconde courbure de la courbe (T)

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\psi},$$

la relation (42) peut s'écrire

$$\text{(42 \textit{bis})} \qquad \tan\beta = \frac{v^2}{\rho g \cos\omega}\left[Q - \frac{\rho_1 d}{\rho^2}\right] + \tan\omega \sin\psi$$

avec

$$Q = 1 + \frac{1}{Ml}\left[\frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right].$$

Pratiquement, si le rayon de courbure ρ est grand, si la courbure varie lentement (ρ_1 petit) et si l'on néglige la rotation des roues, la formule (42 *bis*) devient

$$\text{(43)} \qquad \tan\beta = \frac{v^2}{\rho g \cos\omega} + \tan\omega \cos\psi,$$

largement suffisante dans les applications pratiques.

En particulier, lorsque la machine est dirigée suivant la ligne de plus grande pente du sol, on a $\psi = 0$ et la formule (43) devient

$$\tang \beta = \frac{v^2}{\rho g \cos \omega}.$$

Enfin, en désignant par α l'angle d'inclinaison de la machine sur le sol (α est le complément de β) on a, dans ce cas particulier,

$$\tang \alpha = \frac{\rho g}{v^2} \cos \omega.$$

On retrouve ainsi la formule élémentaire de notre *Nouveau Traité* [1re Partie, page 54, formule (III)].

Équilibre imparfait.

33. A première vue, sans réflexion, on pourrait croire que le problème général de la direction d'une bicyclette doit s'énoncer ainsi :

Faire décrire au point de contact de la roue motrice un chemin donné à l'avance.

Il est aisé de se rendre compte, sans aucun calcul, que ce problème est généralement insoluble. En d'autres termes, le problème de l'équilibre imparfait, *ainsi énoncé,* n'a pas de solution, en général, si l'on admet (ce qui a lieu dans la réalité) que la vitesse v de la machine reste constante.

En effet, comme nous l'avons expliqué au n° **21**, dès qu'on se donne la trajectoire (T) de la roue motrice, la vitesse v et les conditions initiales, l'intégrale β de l'équation (29) est parfaitement déterminée.

Pour qu'il y ait équilibre (imparfait) il faudrait que, quel que soit le temps t, β reste compris entre deux limites φ et $-\varphi$; et cela n'aura pas lieu en général.

Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que, si l'on se donne β en fonction du temps, on pourra considérer l'équation (29) comme fournissant ρ en fonction de s, et, par suite, comme définissant (T). On peut donc choisir la trajectoire (T) de façon que β soit telle fonction qu'on voudra de t et, par conséquent, de façon qu'il n'y ait pas équilibre.

On peut donc énoncer le résultat important que voici :

En marche uniforme, un cycliste ne peut pas, en général, faire décrire, exactement et indéfiniment, à la roue motrice un chemin arbitraire, donné à l'avance. Cela n'est possible que dans un temps limité, au bout duquel la chute est inévitable, à moins que le cycliste ne modifie sa route.

En fait, un cycliste, qui veut faire suivre à sa bicyclette un chemin donné, fait décrire à la roue motrice, non pas ce chemin lui-même, mais un chemin voisin sur lequel l'équilibre est possible.

Nous appellerons, d'une façon générale, *courbe d'équilibre,* toute courbe sur laquelle l'équilibre est possible. Les courbes d'équilibre parfait, étudiées plus haut, ne sont qu'un cas très particulier de celles-ci, dont l'équation peut contenir autant de paramètres arbitraires qu'on voudra.

On obtiendrait, par exemple, une collection déjà très vaste de courbes d'équilibre de la façon suivante : Dans l'équation (29), remplaçons β par une fonction périodique du temps, telle que la valeur absolue de β reste toujours inférieure à $\varphi = \text{arc tang} f$. Remplaçons ensuite t par $\frac{s}{v}$ et nous aurons une équation différentielle en ρ et s qui définira les courbes d'équilibre.

Le problème général de la direction d'une bicyclette serait alors le suivant :

Supposant toujours la vitesse v constante, soit (C) *une courbe tracée sur le sol. Portons sur les normales à* (C), *de part et d'autre du pied, des longueurs égales à une petite longueur δ donnée à l'avance; nous obtiendrons ainsi deux courbes parallèles* (C') *et* (C'') *limitant une bande, un sentier de largeur* 2δ, *ayant la courbe* C *pour ligne médiane. Trouver une courbe d'équilibre comprise tout entière à l'intérieur du sentier ainsi défini.*

Ainsi présentée, la question aura vraisemblablement une solution dans le cas général. Si, en effet, on observe ce fait capital que l'équation du mouvement relatif du plan moyen ne contient que le rayon de courbure ρ de la courbe (T), on conçoit que, tout en substituant au chemin (C), que l'on veut suivre approximativement, une courbe (T) très voisine, on pourra cependant disposer de la variation de ρ dans des limites assez larges pour que la courbe (T) soit une courbe d'équilibre.

En fait, si ce problème peut présenter un intérêt analytique, il est, au point de vue pratique, peu intéressant, car tout cycliste habile se sert de légers mouvements du buste pour réaliser, dans les meilleures conditions possibles, le changement de trajectoire en question. Or, tous nos calculs sont faits dans l'hypothèse où le buste reste immobile par rapport au cadre.

C'est, sans aucun doute, par des mouvements du guidon que le cycliste dirige et maintient sa bicyclette à l'équilibre, *en gros;* mais il corrige, par des déplacements imperceptibles du torse, ce que cet équilibre théorique peut avoir de défectueux.

Une étude très approfondie de l'équilibre théorique ne serait donc, à notre avis, qu'un exercice analytique pur, sans application pratique.

34. Quoi qu'il en soit, nous admettrons donc que la machine suit une courbe d'équilibre. β, par suite, variera dans les limites $-\varphi$ et $+\varphi$ qui sont, en fait, assez resserrées; de plus, si le cycliste est habile, les variations de β ne seront que *très lentes*. Dans chaque double oscillation, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ s'annulent chacun deux fois, en changeant de signe. Il en résulte que les valeurs numériques de $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ seront, sauf exception rare, toujours *très petites*.

La valeur de l'angle β sera donc, à chaque instant, très voisine de celle que l'on obtient en annulant, dans l'équation du mouvement relatif du plan moyen, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d^2\beta}{dt^2}$.

Or, comme nous l'avons vu plus haut (n^{os} 25 et 31), il existe, en chaque point de la trajectoire, une courbe d'équilibre parfait ayant avec elle un contact du troisième ordre en ce point. D'ailleurs, si l'on annule $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ dans l'équation du mouvement relatif, la valeur obtenue pour β ne dépend que des deux rayons de courbure première et seconde, ρ et ρ_1. Ces deux rayons étant égaux, sur la trajectoire suivie par la roue arrière et sur la courbe d'équilibre parfait osculatrice, on parvient au résultat suivant :

Lorsqu'une bicyclette est en équilibre imparfait, l'angle β *est, à chaque instant, très sensiblement, égal à l'angle d'équilibre qui correspond à la courbe d'équilibre parfait osculatrice, au point de contact de la roue motrice avec le sol, à la trajectoire de ce point.*

La valeur de l'angle β nous est donc donnée par la formule (42) ou (42 *bis*) du n° **32** :

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{v^2}{\rho g \cos\omega}\left[1 + \frac{1}{Ml}\left(\frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right) - \frac{\rho_1 d}{\rho^2}\right] + \operatorname{tang}\omega \sin\psi,$$

dans le cas général d'un sol incliné d'un angle ω sur un plan horizontal.

Le cas particulier du sol horizontal s'obtient en faisant $\omega = 0$ dans cette formule.

Pratiquement, en négligeant l'effet de la rotation des roues et en admettant que ρ est grand et varie lentement, on pourra appliquer la formule suivante

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{v^2}{\rho g \cos\omega} + \operatorname{tang}\omega \sin\psi,$$

qui ne contient plus le rayon de seconde courbure ρ_1.

Dans tous les cas il faudra, en outre, que l'on ait

$$\operatorname{tang}\beta < f.$$