BULLETIN DE LA S. M. F.

C. BOURLET

Étude théorique sur la bicyclette

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 47-67.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__47_1>

ÉTUDE THÉORIQUE SUR LA BICYCLETTE;

Par M. C. Bourlet.

Le présent travail n'est qu'une reproduction partielle d'un Mémoire plus développé que j'ai déposé, en juin 1897, pour le concours du prix Fourneyron, à l'Académie des Sciences, et qui a été récemment couronné.

Il se compose de deux Parties.

Dans la première, je forme l'équation différentielle du mouvement relatif du plan moyen d'une bicyclette, par rapport au sol, dans le cas courant où le cycliste actionne la machine par les pédales et tient les poignées du guidon en mains.

Dans la seconde, je me sers de cette équation pour étudier les conditions d'équilibre.

J'ai écarté, intentionnellement, le cas du « lâche-mains », c'est-à-dire celui où le cycliste se dirige sans tenir les poignées dans les mains; car, pour que les résultats d'une étude analytique précise aient là quelque vraisemblance, il faudrait tenir compte de la résistance au roulement des roues, et malheureusement les données expérimentales font défaut sur ce sujet [1].

Première Partie.

1. Une bicyclette se compose de trois parties distinctes : le *cadre,* la *roue-arrière* et la *direction.*

La direction est l'ensemble formé par la roue d'avant, la fourche directrice et le guidon.

Le cadre présente un plan de symétrie qu'avec Macquorn Rankine nous nommerons le *plan moyen* de la machine.

Nous considérerons, dans la suite, les deux roues comme réduites à des cercles mathématiques indéformables. Dans ces conditions, chacune d'elles touche le sol en un point et un seul. Le plan de la roue d'arrière (ou roue motrice) coïncide toujours avec le plan moyen. Celui de la roue d'avant (ou roue directrice) est variable par rapport au plan moyen et, lorsqu'il coïncide avec lui, on dit que le guidon est *droit.*

Soient alors A le point de contact de la roue d'arrière avec le sol (supposé plan) et B celui de la roue directrice. Lorsque le guidon est droit, la droite d'intersection du plan moyen avec le sol est AB.

Dès qu'on tourne le guidon il n'en est plus ainsi; le point de contact B de la roue d'avant sort du plan moyen. Cependant, dans la réalité, pour toutes les machines qu'on construit aujourd'hui, l'écart entre la droite AB et la trace du plan moyen sur le sol est si faible qu'on peut le négliger. D'ailleurs, pour nous placer dans les conditions les plus favorables à la légitimité de cette approximation, nous supposerons que, lorsque le guidon est droit, le point B est situé sur l'axe de rotation de la direction [2]. Ce point B restera ainsi toujours très voisin de cet axe et nous pourrons admettre que c'est un point fixe de cet axe.

La longueur AB est alors une longueur *constante* que nous

---

(1) Dans mon *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes,* Paris, Gauthier-Villars (1re Partie, *Équilibre et direction,* p. 87 à 107), j'ai, par des raisonnements élémentaires, donné des explications générales sur ce sujet qui sont pratiquement suffisantes.

(2) Consulter à ce sujet mon *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes* (1re Partie), p. 13 et 14.

désignerons dorénavant par b et que nous nommerons la *longueur de la bicyclette*. La droite AB est ce que Macquorn Rankine appelle la *base*.

2. Prenons le plan du sol pour plan de notre figure (*fig.* 1) et soient AR et BR′ les traces des plans des deux roues sur le sol.

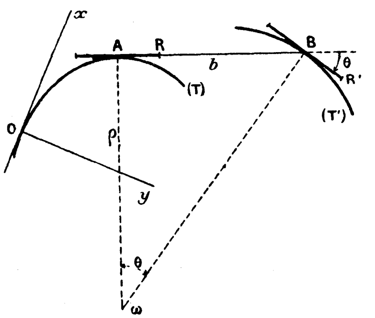
Comme le plan de la roue motrice coïncide avec le plan moyen, AR est confondue avec AB. Désignons par θ l'angle de BR′ avec AB; c'est cet angle que nous appellerons *l'angle dont le guidon a tourné,* quoique cette dénomination ne soit pas absolument exacte.

Les deux roues sont évidemment tangentes à AR et BR′ en A et B; il en résulte que les trajectoires (T) et (T′) des deux points de contact A et B, sur le sol sont deux courbes tangentes en A et B l'une à AR (ou AB), l'autre à BR′.

Comme la longueur AB est constante, on peut immédiatement énoncer le résultat suivant :

La trajectoire (T′) *du point de contact de la roue directrice se déduit de la trajectoire* (T) *de celui de la roue motrice en*

Fig. 1.



portant sur les tangentes à (T), *dans le sens de la marche, à partir du point de contact, une longueur constante égale à la longueur b de la machine*

3. Soient alors s l'arc OA (*fig.* 1) de la courbe (T), compté à partir d'un certain point O que nous prendrons pour origine des coordonnées, et s' l'arc correspondant de (T′). L'axe Ox étant la tangente en O à la courbe (T), si l'on désigne par x, y les

coordonnées de A, par x', y' celles de B et par θ l'angle de BR′ avec AB, on a évidemment les relations

$$(1)\quad \begin{cases} (x-x')^2+(y-y')^2=b^2, \\ \dfrac{dx}{x'-x}=\dfrac{dy}{y'-y}, \\ \dfrac{dx}{ds}\dfrac{dx'}{ds'}+\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dy'}{ds'}=\cos\theta. \end{cases}$$

De ces équations, en supposant θ connu en fonction de s, on tire facilement les égalités suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} x=\displaystyle\int_0^s \cos\left(\frac{1}{b}\int_0^s \operatorname{tang}\theta\, ds\right)ds, \\ y=\displaystyle\int_0^s \sin\left(\frac{1}{b}\int_0^s \operatorname{tang}\theta\, ds\right)ds, \end{cases}$$

qui, avec

$$(3)\quad \begin{cases} x'=x+b\,\dfrac{dx}{ds}, \\ y'=y+b\,\dfrac{dy}{ds}, \end{cases}$$

donnent les coordonnées des points A et B en fonction de l'arc s de (T).

Si l'on désigne par ρ et ρ' les rayons de courbure des courbes (T) et (T′), on a, en outre,

$$(4)\quad \frac{1}{\rho}=\frac{\operatorname{tang}\theta}{b},$$

$$(5)\quad \frac{1}{\rho'}=\frac{\sin\theta}{b}+\frac{d\theta}{ds}\cos\theta.$$

La formule (4) donne une construction géométrique simple du centre de courbure ω (*fig.* 1) de la trajectoire (T) en A.

Le centre de courbure ω *de la trace* (T) *est à l'intersection des perpendiculaires en* A *et* B *aux droites* AR *et* BR′. *C'est donc le point d'intersection des normales en* A *et* B *aux deux courbes* (T) *et* (T′).

La formule (5) donne, *lorsque* θ *est constant,*

$$\rho'=\frac{b}{\sin\theta},$$

ce qui montre que, *dans ce cas,* ω est le centre de courbure commun des deux traces dont les rayons de courbure sont, d'ailleurs, constants.

Donc : *lorsque* θ *est constant, les trajectoires* (T) *et* (T′) *sont des cercles concentriques.*

Ce qui était presque évident.

Enfin, les formules (1) donnent encore

$$ds = ds' \cos \theta.$$

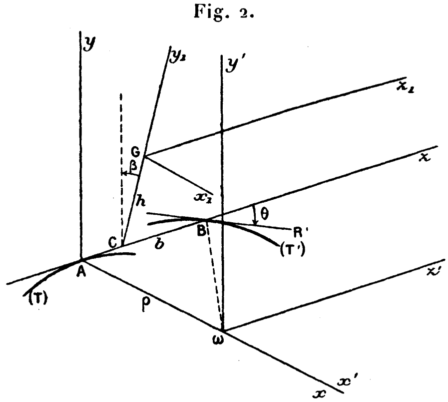
On en conclut, en appelant v et v' les vitesses de déplacement des points A et B sur leurs trajectoires,

$$v = v' \cos \theta. \tag{6}$$

Ce sont là les seules relations entre les trajectoires des deux roues qui pourront nous servir dans la suite. Nous renverrons, pour plus de détails, au Chapitre premier du premier Volume de notre *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes.*

4. Le sol étant toujours supposé plan et A et B étant les points de contact des deux roues avec lui, considérons un trièdre $Axyz$ lié invariablement à la machine et défini comme il suit (*fig.* 2) :

Fig. 2.



Ay est la normale au plan du sol; Az est la base AB (direction positive de A vers B); et le trièdre est orienté *dextrorsum,* comme de coutume.

Dans ces conditions, le plan Axz coïncide sans cesse avec le plan du sol, sur lequel il glisse, et *dès que l'on se donne le mouvement du point* A *sur sa trajectoire celui du trièdre* $Axyz$ *est parfaitement défini.*

Tandis que le plan Axz glisse sur le sol et que le point A décrit sa trajectoire (T), tangente à Az, la droite Ax, normale à (T), roule, sans glisser, sur la développée de cette courbe. Il en résulte que, dans le mouvement du plan Axz, la roulette est la droite Ax et la base la développée de (T).

Le centre instantané est donc, à chaque instant, le centre de courbure ω (*fig.* 2) *de la trajectoire* (T) *de* A.

La vitesse angulaire de rotation est $\frac{v}{\rho}$, v et ρ ayant les mêmes significations que plus haut.

On en conclut, enfin, que l'*axe instantané de rotation du trièdre mobile* $Axyz$ *est, à chaque instant, la parallèle* $\omega y'$ *menée, par le centre de courbure* ω *de la trajectoire* (T), *à* Ay.

5. Tous ces préliminaires étant posés, formons l'équation différentielle du mouvement relatif du plan moyen de la bicyclette, par rapport au trièdre $Axyz$.

Pour faire ce calcul, *nous considérerons le cycliste comme absolument immobile par rapport au cadre de la machine et nous admettrons que le plan moyen est un plan de symétrie pour lui.*

En d'autres termes, nous supposerons que le cycliste ne fait aucun mouvement du torse, et nous négligerons les mouvements des jambes (ce qui est assez légitime, vu leur faible amplitude et leur symétrie). D'ailleurs, nos hypothèses seraient sensiblement vérifiées dans le cas d'une motocyclette.

D'après les principes, bien connus, du mouvement relatif, il nous faudra donc, pour former l'équation cherchée, écrire qu'il y a équilibre entre les forces centrifuges, les forces centrifuges composées, les forces d'inertie et la pesanteur, en vertu des liaisons.

A et B étant deux points fixes du trièdre $Axyz$ nous avons affaire à un corps qui tourne autour d'un axe fixe. Nous devrons donc exprimer que la somme des moments des forces précédentes par rapport à Az est nulle.

Le cycliste et sa machine forment un ensemble composé de trois parties :

1° L'ensemble du cavalier, du cadre et de la fourche directrice qui, d'après nos hypothèses, a une forme invariable ; pour abréger le langage, nous le nommerons l'*ensemble* $\mathcal{E}$;
2° La roue motrice, ou roue d'arrière ;
3° La roue directrice, ou roue d'avant.

Nous calculerons séparément les moments des forces des quatre catégories précitées, pour ces trois parties ; il ne nous restera plus ensuite qu'à annuler leur somme.

Cette façon de procéder aura le double avantage de mettre de l'ordre dans ce calcul si complexe et de placer en évidence, dans l'équation, des groupes de termes ayant chacun une signification propre et une provenance connue.

Calcul des moments pour l'ensemble $\mathcal{E}$.

6. Soit G (*fig.* 2), le centre de gravité de l'ensemble $\mathcal{E}$, qui, vu la symétrie de cet ensemble, est situé dans le plan moyen.

Abaissons de G la perpendiculaire GC sur la base AB (ou Az), et désignons par β l'angle du plan moyen avec la face Ayz du trièdre $Axyz$ défini plus haut.

β est le complément de l'angle d'inclinaison du plan moyen sur le sol.

Considérons encore les deux trièdres suivants :

1° Le trièdre $\omega x'y'z'$ qui n'est autre chose que le trièdre $Axyz$ transporté parallèlement à lui-même au centre instantané de rotation ω ; $\omega y'$ est alors l'axe instantané de rotation du trièdre $Axyz$.

2° Le trièdre $Gx_1y_1z_1$, lié invariablement à l'ensemble $\mathcal{E}$, dans lequel Gz_1 est parallèle à Az, Gy_1 dans le prolongement de GC et Gx_1 perpendiculaire au plan moyen.

Le plan moyen étant un plan de symétrie, pour l'ensemble $\mathcal{E}$, Gx_1 est un axe principal d'inertie et l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de $\mathcal{E}$, relatif à G, a la forme

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 - 2Dy_1z_1 = 1. \tag{7}$$

On a, comme on sait,

$$A < B + C.$$

D'autre part, la distance ωA (*fig.* 2) étant le rayon de courbure ρ de la trajectoire (T) de A, en désignant par h la distance GC, et par c la distance AC, on a les formules de transformation de coordonnées suivantes :

$$(8)\qquad \begin{cases} x = x' + \rho, \quad y = y', \quad z = z'; \\ x' = -\rho + x_1\cos\beta + (y_1 + h)\sin\beta, \\ y' = \qquad -x_1\sin\beta + (y_1 + h)\cos\beta, \\ z' = \quad c + z_1. \end{cases}$$

7. Soient, alors, μ la masse d'un point de $\mathcal{C}$; x', y', z' ses coordonnées, par rapport au trièdre $\omega x'y'z'$. Calculons les projections X et Y, de la force centrifuge qui agit sur ce point, sur Ax et Ay.

Le mouvement du trièdre $Axyz$ est identique à celui de la face Axz qui glisse sur le sol. L'axe instantané est $\omega y'$ et la vitesse de rotation $\frac{v}{\rho}$; v étant toujours la vitesse de déplacement de A sur sa trajectoire, ce que nous appellerons *la vitesse de la machine*. En appliquant les résultats classiques qui fournissent l'accélération d'un point d'un plan mobile qui glisse sur un plan fixe, on trouve

$$X = \mu\left[\left(\frac{v}{\rho}\right)^2 x' - \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)z'\right], \qquad Y = 0.$$

La somme N_f des moments de toutes les forces centrifuges, par rapport à Az, est donc

$$(9)\qquad N_f = -\sum\mu\left[\left(\frac{v}{\rho}\right)^2 x' - \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)z'\right]y,$$

la somme $\sum$ s'étendant à tous les points de l'ensemble $\mathcal{C}$.

On en déduit

$$N_f = -\sum\mu\left\{\frac{v^2}{\rho^2}[-\rho + x_1\cos\beta + (y_1 + h)\sin\beta] - \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)(c + z_1)\right\}$$
$$\times[-x_1\sin\beta + (y_1 + h)\cos\beta].$$

Or, comme G est le centre de gravité de $\mathcal{C}$, on a

$$\sum\mu x_1 = \sum\mu y_1 = \sum\mu z_1 = 0;$$

et, de plus, l'ellipsoïde d'inertie donne

$$\sum \mu x_1 y_1 = \sum \mu x_1 z_1 = 0, \qquad \sum \mu y_1 z_1 = D,$$

$$\sum \mu (y_1^2 - x_1^2) = A - B.$$

En tenant compte de ces relations, et en désignant par $\mathfrak{M}$ la masse totale de l'ensemble $\mathcal{E}$, on trouve, tous calculs faits,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_f = {} & \frac{v^2}{\rho} \mathfrak{M} h \cos\beta - \frac{v^2}{\rho^2} (A - B + \mathfrak{M} h^2) \cos\beta \sin\beta \\ & + \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)(\mathfrak{M}\, ch + D) \cos\beta. \end{aligned} \right.$$

8. Passons au calcul de la somme des moments des forces centrifuges composées pour l'ensemble $\mathcal{E}$.

En désignant, pour un instant, par p, q, r les projections de la rotation instantanée du trièdre $Axyz$ sur les axes, on sait que les projections X, Y, Z de la force centrifuge composée qui agit sur un point de masse μ sont

$$\left\{ \begin{aligned} X &= -2\mu\left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt}\right), \\ Y &= -2\mu\left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt}\right), \\ Z &= -2\mu\left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Or, ici, on a

$$p = 0, \qquad q = \frac{v}{\rho}, \qquad r = 0;$$

les formules précédentes deviennent donc

$$X = -2\mu \frac{v}{\rho} \frac{dz}{dt}, \qquad Y = 0, \qquad Z = 2\mu \frac{v}{\rho} \frac{dx}{dt}.$$

Le moment de cette force, par rapport à Az, est donc

$$2\mu \frac{v}{\rho} y \frac{dz}{dt},$$

et la somme des moments de ces forces est

$$(11) \qquad N_c = 2 \frac{v}{\rho} \sum \mu y \frac{dz}{dt}.$$

Dans le cas de l'ensemble $\mathcal{C}$, on a, pour tous les points,

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

donc

$$N_c = 0. \tag{12}$$

9. Conservant toujours les mêmes notations, les projections de la force d'inertie qui agit sur le point de masse μ et de coordonnées x, y, z, sur Ax et Ay, sont

$$-\mu\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -\mu\frac{d^2y}{dt^2}.$$

La somme des moments de toutes ces forces d'inertie par rapport à Az est donc

$$N = \frac{d}{dt}\left[\sum\mu\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)\right]. \tag{13}$$

Remplaçons x et y par leurs valeurs tirées des formules (8) et nous trouvons, en tenant compte de l'égalité

$$\sum\mu(x_1^2 + y_1^2) = C,$$

l'expression suivante pour la somme des moments des forces d'inertie agissant sur l'ensemble $\mathcal{C}$

$$N_i = (\mathfrak{M}h^2 + C)\frac{d^2\beta}{dt^2}. \tag{14}$$

10. Enfin, pour calculer le moment de la pesanteur, il nous faut distinguer deux cas :

1° Si le sol est *horizontal*, Ay (*fig.* 2) est une verticale de bas en haut et les projections du poids total de l'ensemble $\mathcal{C}$ sur les axes Ax, Ay, Az, sont

$$0, \quad -\mathfrak{M}g, \quad 0.$$

Les coordonnées du centre de gravité G étant

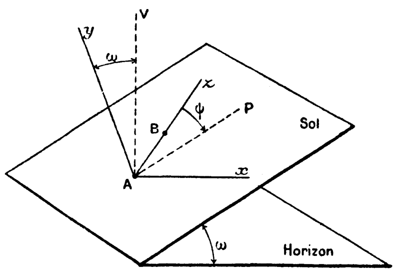
$$\xi = h\sin\beta, \qquad \eta = h\cos\beta, \qquad \zeta = c,$$

le moment de ce poids, par rapport à Az, est

$$N_p = -\mathfrak{M}gh\sin\beta. \tag{15}$$

2° Si le sol est *incliné* et fait un angle ω avec un plan horizontal, Ay fait avec la verticale AV (*fig.* 3) un angle égal à ω. Soient, d'ailleurs, AP la ligne de plus grande pente (montante) du plan du sol, et ψ l'angle dont il faut faire tourner Az pour l'amener à coïncider avec AP, les projections du poids $\mathfrak{M}g$, dont la direction est

Fig. 3.



parallèle à VA, sur les trois axes Ax, Ay, Az, seront

$$+\mathfrak{M}g\sin\omega\sin\psi,\qquad -\mathfrak{M}g\cos\omega,\qquad -\mathfrak{M}g\sin\omega\cos\psi,$$

et le moment de ce poids, par rapport à Az, sera

$$N_p = -\mathfrak{M}gh[\sin\beta\cos\omega - \sin\omega\cos\beta\sin\psi]. \tag{15 bis}$$

Calcul des moments pour la roue motrice.

11. Soit, comme plus haut, $Axyz$ le trièdre entraîné avec la bicyclette.

La roue motrice est tangente à Az, en A, et son plan coïncide avec le plan moyen. Soient O son centre et $Ox_1y_1z_1$ un trièdre (*fig.* 4) lié invariablement à cette roue : Ox_1 étant l'axe de la roue, Oz_1 parallèle à Az et Oy_1 dans le prolongement de AO. L'angle yAy_1 est l'angle β du plan moyen avec le plan yAz.

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue, relatif au point O, est de la forme

$$Ex_1^2 + F(y_1^2 + z_1^2) = 1, \tag{16}$$

avec

$$E < 2F.$$

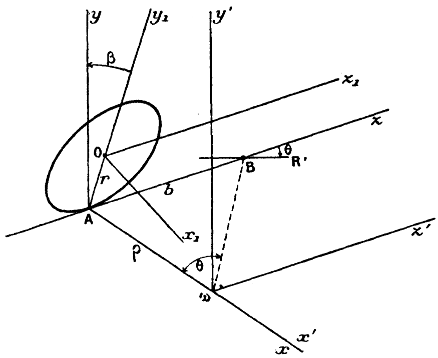
Comme la roue est un solide très aplati, la différence $F - \frac{E}{2}$ est *très faible*.

En désignant par r le rayon de cette roue, on a les formules de transformation de coordonnées

$$(17) \qquad \begin{cases} x = x_1 \cos\beta + (y_1 + r)\sin\beta, \\ y = -x_1 \sin\beta + (y_1 + r)\cos\beta, \\ z = z_1. \end{cases}$$

12. Ceci posé, en désignant toujours par $\omega x'y'z'$, le trièdre obtenu (*fig.* 4) par la translation du trièdre $Axyz$ en ω, il suffit

Fig. 4.



d'appliquer la formule (9) du n° **7** pour avoir la somme des moments des forces centrifuges agissant sur la roue d'arrière.

En remplaçant dans cette formule x et y par leurs valeurs tirées de (17) et effectuant la somme $\sum$ étendue à tous les points de la roue, on a

$$(18) \qquad N'_y = \frac{v^2}{\rho} mr \cos\beta - \frac{v^2}{\rho^2} \cos\beta \sin\beta (E - F + mr^2),$$

m désignant la masse de la roue.

13. Pour avoir la somme des moments des forces centrifuges composées on appliquera la formule (11) du n° **8**.

Or ici $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt}$ n'est pas nul, car la roue est animée d'un mouvement de rotation autour de Ox_1 avec une vitesse angulaire égale à $\frac{v}{r}$. On a donc

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{v}{r} y_1,$$

et, par suite,

$$N'_c = 2 \frac{v^2}{r\rho} \sum \mu y y_1.$$

En remplaçant y par sa valeur (17) et remarquant que

$$\sum \mu y_1^2 = \sum \mu z_1^2 = \frac{E}{2},$$

on trouve

$$N'_c = E \frac{v^2}{r\rho} \cos\beta. \tag{19}$$

14. En appliquant à la roue d'arrière la formule (13) du n° **9**, on aura la somme des moments des forces d'inertie. Mais, ici, dans le calcul des dérivées de x et y données par les formules (17), il faudra tenir compte de ce que, à cause de la rotation de la roue, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{v}{r} z_1, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{v}{r} y_1.$$

Tous calculs faits, on trouve

$$N'_i = (mr^2 + F) \frac{d^2\beta}{dt^2}. \tag{20}$$

Le résultat est le même que si la roue ne tournait pas, ce qui était facile à prévoir.

15. Le calcul du moment de la pesanteur est identique à celui qui a été fait pour l'ensemble $\mathcal{E}$. On trouve

1° Dans le cas du *sol horizontal*

$$N'_p = -mgr \sin\beta. \tag{21}$$

2° Dans le cas du *sol incliné*

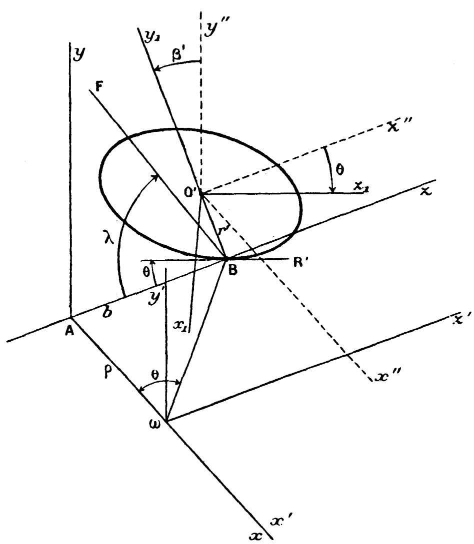
$$N'_p = -mgr(\sin\beta\cos\omega - \sin\omega\cos\beta\sin\psi). \tag{21 bis}$$

Calcul des moments pour la roue directrice.

16. Les calculs relatifs à la roue directrice sont plus compliqués que les précédents parce que son plan ne coïncide pas avec le plan moyen et que, de plus, ce plan est animé d'un mouvement de rotation *connu* autour du tube de direction.

Soient B le point de contact de la roue directrice avec le sol (*fig*. 5), et BF la direction du tube de direction (axe de rotation du plan de la roue d'avant) qui, d'après nos hypothèses, passe en B. Désignons par λ l'angle d'inclinaison de BF sur la base AB, angle qui, dans les conditions où nous nous plaçons, doit être considéré comme constant. Soient BR' la trace du plan de la roue

Fig. 5.



directrice sur le sol et θ l'angle qu'elle fait avec Bz; β' l'angle du plan de la roue directrice avec la normale au sol. Si l'on remarque que BF étant dans le plan moyen, le plan zBF est précisément le plan moyen, le trièdre BFzR', dans lequel le dièdre Bz est égal à β, donne

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{tang}\beta' = \frac{\sin\theta}{\cos\beta}\cot\lambda + \cos\theta \operatorname{tang}\beta,$$

relation qui permet de calculer β' connaissant λ, θ et β.

Ceci posé, aux deux systèmes d'axes Axyz et $\omega x'y'z'$ que nous considérons d'ordinaire, adjoignons (*fig*. 5) le système O'$x_1y_1z_1$, lié invariablement à la roue directrice, dans lequel O' est le centre de la roue, $O'z_1$ parallèle à BR', $O'x_1$ l'axe de la roue et $O'y_1$ la droite BO' prolongée.

Lorsqu'on transporte les axes $Axyz$ parallèlement à eux-mêmes en $O'x''y''z''$, on passe, ensuite, de ces axes à $O'x_1y_1z_1$ par une double rotation : une rotation de l'angle θ autour de $O'y''$, et une rotation de l'angle β' autour de $O'z_1$. Ceci donne, alors, les formules de transformation suivantes

$$(23)\quad \begin{cases} x = x_1 \cos\beta' \cos\theta + (r'+y_1)\sin\beta' \cos\theta + z_1 \sin\theta, \\ y = -x_1 \sin\beta' + (r'+y_1)\cos\beta', \\ z = b - x_1\cos\beta' \sin\theta - (r'+y_1)\sin\beta' \sin\theta + z_1\cos\theta; \end{cases}$$

r' désignant le rayon de la roue directrice et b la longueur de la machine.

Enfin, l'ellipsoïde d'inertie de la roue par rapport à O' a une équation de la forme

$$(24)\qquad E'x_1^2 + F'(y_1^2 + z_1^2) = 1.$$

17. Appliquons, pour calculer la somme des moments des forces centrifuges, la formule (9) du n° **7**, en y remplaçant x et y par leurs valeurs (23).

En effectuant les calculs et tenant compte de ce que

$$\sum \mu x_1 = \sum \mu y_1 = \sum \mu z_1 = 0,$$

$$\sum \mu x_1 y_1 = \sum \mu y_1 z_1 = \sum \mu x_1 z_1 = 0,$$

$$\sum \mu y_1^2 = \sum \mu z_1^2 = \frac{E'}{2}, \qquad \sum \mu x_1^2 = F' - \frac{E'}{2},$$

on trouve

$$(25)\quad \begin{cases} N''_f = \dfrac{v^2}{\rho} m'r'\cos\beta' - \dfrac{v^2}{\rho^2}\cos\beta'\sin\beta'\cos\theta(E' - F' + m'r'^2) \\ \qquad + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\rho}\right)[b\,m'r'\cos\beta' - (E' - F' + m'r'^2)\cos\beta'\sin\beta'\sin\theta], \end{cases}$$

où m' désigne la masse de la roue d'avant.

18. Pour les moments des forces centrifuges composées, il nous faut appliquer la formule (11) du n° **8**.

Dans le calcul de $\dfrac{dz}{dt}$ il faudra tenir compte de ce que la roue est animée d'un mouvement de rotation autour de $O'x_1$ avec une vitesse angulaire égale à $\frac{v'}{r'}$, v' étant la vitesse de déplacement de B. Or, d'après la formule (6) du n° 3, on a

$$v' = \frac{v}{\cos\theta}, \qquad \frac{v'}{r'} = \frac{v}{r'\cos\theta};$$

on en conclut

$$\frac{dx_1}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{v}{r'\cos\theta}z_1, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{v}{r'\cos\theta}y_1.$$

En prenant la dérivée, par rapport à t, de la dernière formule (23), on en tire

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= [x_1\sin\beta'\sin\theta - (r'+y_1)\cos\beta'\sin\theta]\frac{d\beta'}{dt}\\ &\quad - [x_1\cos\beta'\cos\theta + (r'+y_1)\sin\beta'\cos\theta + z_1\sin\theta]\frac{d\theta}{dt}\\ &\quad + [z_1\sin\beta'\sin\theta + y_1\cos\theta]\frac{v}{r'\cos\theta}.\end{aligned}$$

En portant cette expression de $\frac{dz}{dt}$ dans la formule (11) ainsi que la valeur de y fournie par les égalités (23), on trouve, après réductions,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} N''_c &= \frac{v^2}{\rho r'}E'\cos\beta' - 2\frac{v}{\rho}(E' - F' + m'r'^2)\cos\beta'\sin\beta'\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\\ &\quad - 2\left[\left(m'r'^2 + \frac{E'}{2}\right)\cos^2\beta' + \left(F' - \frac{E'}{2}\right)\sin^2\beta'\right]\frac{v}{\rho}\sin\theta\frac{d\beta'}{dt}.\end{aligned}\right.$$

19. L'application de la formule (13) du n° 9 à la roue directrice nous donnera, pour elle, la somme des moments des forces d'inertie.

En ayant égard aux valeurs de $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ données au n° **18**, on a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x_1\frac{d}{dt}(\cos\beta'\cos\theta) + (r'+y_1)\frac{d}{dt}(\sin\beta'\cos\theta) + z_1\frac{d}{dt}(\sin\theta)\\ &\quad - (z_1\sin\beta'\cos\theta - y_1\sin\theta)\frac{v}{r'\cos\theta},\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x_1\frac{d}{dt}(\sin\beta') + (r'+y_1)\frac{d}{dt}(\cos\beta') - \frac{vz_1}{r'\cos\theta}\cos\beta'.$$

Portant ces valeurs dans la formule (13), on a, finalement, par des calculs faciles,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} N''_i = (m'r'^2 + E')\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\frac{d\beta'}{dt}\right) \\ -(E' - F' + m'r'^2)\frac{d}{dt}\left(\sin\beta'\cos\beta'\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) \\ + E'\frac{v}{r'}\frac{d}{dt}(\cos\beta'\operatorname{tang}\theta). \end{aligned}\right.$$

20. Enfin, les coordonnées du centre O′ de la roue directrice étant

$$\xi' = r'\sin\beta'\cos\theta, \qquad \eta' = r'\cos\beta', \qquad \zeta' = b - r'\sin\beta'\sin\theta,$$

on a les expressions suivantes, pour le moment de son poids, par rapport à Az :

1° Dans le cas du *sol horizontal*

$$(28)\qquad N''_p = -m'r'g\sin\beta'\cos\theta;$$

2° Dans le cas du *sol incliné*

$$(28\ bis)\qquad N''_p = -m'r'g(\cos\omega\sin\beta'\cos\theta - \sin\omega\cos\beta'\sin\psi),$$

avec les notations précédentes.

Équation du mouvement relatif du plan moyen par rapport au sol.

21. Il ne nous reste plus, pour avoir l'équation différentielle du mouvement relatif de la machine par rapport au trièdre mobile, qu'à égaler à zéro la somme des moments que nous venons de calculer.

Cette équation est donc

$$(29)\quad N_f + N'_f + N''_f + N_c + N'_c + N''_c + N_i + N'_i + N''_i + N_p + N'_p + N''_p = 0,$$

où les lettres N_f, N'_f, ..., N''_p représentent les groupes de termes fournis par les égalités (10) à (28).

Pour avoir l'équation du mouvement dans le cas où le sol est horizontal, il faudra prendre pour N_p, N'_p, N''_p les expressions (15), (21) et (28); au contraire, si le sol est incliné, on prendra les expressions (15 *bis*), (21 *bis*) et (28 *bis*).

L'équation (29) est une équation différentielle du second ordre entre β et la variable t.

Dans cette équation nous connaissons, en effet, tout sauf β, car le seul problème qu'on puisse, raisonnablement, se poser est le suivant :

Un bicycliste faisant décrire à sa machine un chemin connu, à une allure donnée, quel sera le mouvement, en inclinaison, du plan moyen par rapport au sol?

On doit donc considérer la trajectoire (T) de la roue motrice et la vitesse v comme connues. On possède alors l'expression de ρ en fonctions de s, celle de s en fonction de t et, par suite, celle de ρ en t (¹). D'ailleurs, puisque

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{b}{\rho},$$

on connaît aussi θ en fonction de t; et enfin il ne faut pas oublier que β' doit être remplacé, en fonction de β et θ, par l'expression donnée par la formule (22) du n° **16**.

22. L'équation que nous venons de former n'a évidemment qu'un intérêt purement théorique.

Pratiquement, on ne devra l'employer qu'après l'avoir simplifiée.

Pour l'établir, nous avons, en effet, pris la bicyclette dans toute sa complexité, mais nous n'avons pas tenu compte des mouvements des jambes du cavalier. Or, s'il est possible de concevoir un cas théorique où, la bicyclette étant mue mécaniquement, le cycliste conserverait les jambes immobiles, dans la réalité il n'en est rien. Il serait donc ridicule de vouloir conserver ceux des termes dont l'ordre de grandeur est comparable à ceux que l'on a négligés en supposant l'immobilité des jambes.

La discussion numérique, que nous croyons inutile de développer ici parce que nous aurons plus tard l'occasion d'en faire une toute semblable en étudiant l'équilibre, conduit alors à ne conserver, dans les douze groupes de termes, que les premiers.

(¹) Il est bon de remarquer que ρ est une quantité qui peut être positive ou négative.

On parvient ainsi à l'équation approchée, relativement assez simple, que voici

$$\begin{aligned}(\mathfrak{M}h^2 + C + mr^2 + F)\frac{d^2\beta}{dt^2} + (m'r'^2 + F')\frac{d}{dt}\left(\cos\theta\frac{d\beta'}{dt}\right)\\ + \left[\left(\mathfrak{M}h + mr + \frac{E}{r}\right)\cos\beta + \left(m'r' + \frac{E'}{r'}\right)\cos\beta'\right]\frac{v^2}{\rho}\\ + [(\mathfrak{M}ch + D)\cos\beta + m'r'b\cos\beta']\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)\\ - [(\mathfrak{M}h + mr)\sin\beta + m'r'\cos\theta\sin\beta']g = 0,\end{aligned}$$

dans le cas du sol horizontal.

Or, si l'on remarque que, dans cette équation, β' et $\cos\theta$ ne figurent que dans les termes *provenant de la roue directrice;* que d'une part, comme nous le montrerons au n° **28**, ces termes sont en moyenne le $\frac{1}{100}$ des termes de même signe et que, d'autre part, θ étant toujours petit, β' est très voisin de β et $\cos\theta$ de 1, on est conduit à remplacer, dans l'équation qui précède, β' par β et $\cos\theta$ par 1.

Désignons alors par M la masse totale du cavalier et de la bicyclette

$$M = \mathfrak{M} + m + m';$$

par l la distance du centre de gravité de cette masse *totale* à la base AB; on a évidemment

$$\mathfrak{M}h + mr + m'r' = Ml.$$

D'ailleurs, la somme

$$\mathfrak{M}h^2 + C + mr^2 + F + m'r'^2 + F'$$

est la somme des moments d'inertie des trois parties de la masse totale par rapport à AB; cette somme est donc égale au moment d'inertie total par rapport à AB.

Si l'on désigne par Mk^2 le moment d'inertie de la masse *totale* par rapport à un axe parallèle à AB et passant par son centre de gravité, on aura donc

$$\mathfrak{M}h^2 + C + mr^2 + F + m'r'^2 + F' = M(l^2 + k^2).$$

Enfin, on peut poser

$$\mathfrak{M}ch + D + m'r'b = Mld,$$

et d sera une longueur *approximativement* égale à la distance du centre de gravité de la masse totale à une perpendiculaire à la base AB menée, par A, dans le plan moyen.

$\left(\text{Pratiquement, on a environ } d = \frac{b}{3}.\right)$

L'équation *approchée* du mouvement relatif est alors (sur sol horizontal)

$$(29\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} M(l^2+k^2)\frac{d^2\beta}{dt^2} &= Mlg\sin\beta - \left(Ml + \frac{E}{r} + \frac{E'}{r'}\right)\frac{v^2}{\rho}\cos\beta \\ &\quad - Mld\cos\beta\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right). \end{aligned} \right.$$

Dans une Note, parue récemment aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹), M. Boussinesq, en faisant immédiatement des hypothèses simplificatrices, qui reviennent au fond à ne pas tenir compte du mouvement des roues et de la direction, est parvenu à une équation (²) qui ne diffère de la précédente qu'en ce que les deux termes en $\frac{E}{r}$ et $\frac{E'}{r'}$ y manquent.

Grâce à ses restrictions, M. Boussinesq a pu employer une méthode de calcul beaucoup plus élégante et plus rapide que la nôtre.

Malgré cela, les longs calculs qui précèdent n'en conservent peut-être pas moins un intérêt.

Notre équation (29 *bis*) étant déduite d'une équation (29) beaucoup plus complète, la comparaison de ces deux équations sert de justification aux simplifications que M. Boussinesq a faites, avec raison, mais *a priori*.

En second lieu, les deux termes en $\frac{E}{r}$ et $\frac{E'}{r'}$ qui figurent dans notre équation proviennent, comme il est facile de le voir, de ce que nous avons tenu compte de la rotation des roues. Il en résulte donc un fait intéressant : c'est que *si l'on tient compte de la rotation des roues, l'équation différentielle conserve la même forme que celle de M. Boussinesq*. Par suite, les résultats fort intéressants que M. Boussinesq a tirés de l'étude de son équation, en ce qui concerne les petits mouvements oscillatoires du plan

(¹) 28 novembre 1898.

(²) Équation (5), p. 846.

moyen dans la marche rectiligne, subsistent encore lorsqu'on tient compte de la rotation des roues.

Enfin, notre équation (29) *tout entière* nous sera utile, dans la suite, pour approfondir le problème de l'équilibre et reconnaître la nature et la grandeur de l'influence des termes que l'on néglige dans une théorie plus élémentaire.

Si, maintenant, on suppose que le cycliste tourne son guidon assez lentement pour que la variation de $\frac{v}{\rho}$ soit faible, on pourra négliger le terme en $\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\rho}\right)$. En supprimant, en outre, les termes provenant de la rotation des roues, on arrive, enfin, à l'équation élémentaire suivante

$$\text{(29 } ter\text{)} \qquad \frac{l^2+k^2}{l}\frac{d^2\beta}{dt^2} = g\sin\beta - \frac{v^2}{\rho}\cos\beta,$$

qui est celle dont je me suis servi dans mon *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes* (¹) pour discuter le maintien et le rétablissement de l'équilibre. Je renverrai donc le lecteur à cet Ouvrage pour tout ce qui concerne cette question. (*A suivre.*)

(¹) Premier Volume, p. 73.